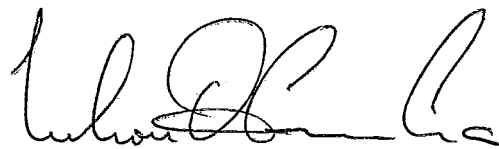


"ESTUDO DE SISTEMAS DE CONTROLE A ESTRUTURA VARIÁVEL"

Fernando Menezes Campello de Souza

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.)

Aprovada por:



Nelson Ortogosa da Cunha  
(Presidente)



Shankar P. Bhattacharyya



Ronaldo C. Marinho Persiano

RIO DE JANEIRO  
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL  
NOVEMBRO DE 1973

Aos meus pais  
À minha esposa  
Aos meus filhos

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Nelson Ortégosa da Cunha, os meus agradecimentos pela orientação e incentivo a este trabalho.

Ao Magnífico Reitor da Universidade Federal de Pernambuco, Professor Marcionilo de Barros Lins, e ao Professor Arnóbio Marques da Gama, os meus agradecimentos pelo apoio que me foi dado.

Aos colegas e funcionários da COPPE/UFRJ, pela colaboração dispensada.

Em particular, quero agradecer ao meu colega e amigo Luiz Gonzaga de Souza Fonseca, pelas discussões e sugestões, e pelo interesse que mostrou durante a realização deste trabalho.

À COPPE e à Universidade Federal de Pernambuco, pelo auxílio financeiro.

RESUMO

Este trabalho tem por finalidade o estudo de uma classe de sistemas de controle auto-adaptativos: os sistemas de controle a estrutura variável.

Um sistema de controle é dito a estrutura variável se a estrutura e/ou os parâmetros do controlador variam, sendo descontínuas as variações de parâmetros, em função do estado, e/ou das perturbações do sistema controlado.

Para o estudo desses sistemas, são usados alguns resultados obtidos por Filippov sobre as equações diferenciais com segundo membro descontínuo, as quais regem o comportamento dinâmico dos referidos sistemas.

É feita uma análise detalhada para o caso de sistemas lineares monodimensionais, visando por em evidência as características e as vantagens principais dos sistemas de controle a estrutura variável. Uma característica essencial desses sistemas é a possibilidade de aparecimento do regime de escorregamento, no qual o sistema controlado se torna invariante.

No estudo da estabilidade, é utilizada uma extensão do segundo método de Liapunov para analisar a relação entre a condição de aparecimento do regime de escorregamento, e a estabilidade de um conjunto invariante, que é a própria superfície de escorregamento.

ABSTRACT

The objective of this work is the study of a class of adaptive control systems: the Variable Structure Control Systems.

A control system is said to be of variable structure if the structure and/or the parameters of the controller varies, the parameters variations being discontinuous, depending on the state, and/or the perturbations of the controlled system.

For this study, some results obtained by Fillipov about the differential equations with discontinuous right-hand side are used.

For the case of single input-single output linear systems, a detailed analysis of the essential properties and advantages of variable structure control systems is done.

An important characteristic of these systems, is the possibility of sliding regimes, when the controlled system becomes invariant.

An extension of Liapunov's second method is used for the stability study, and the analysis of the relationship between the sliding regime condition, and the stability of an invariant set, which is the sliding surface itself.

## INDICE

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO .....	1
CAPÍTULO 2 - APLICAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM SEGUNDO MEMBRO DESCONTÍNUO AOS SISTEMAS DE CONTROLE ....	7
2.1 - Definição de Solução de uma Equação Diferencial..	7
2.2 - Definição de Solução de Filippov .....	8
2.3 - Interpretação da Definição da Solução de Filippov	10
2.4 - Razões para o Estudo de Equações Diferenciais com Segundo Membro Descontínuo .....	16
2.5 - O Segundo Método de Liapunov e as Equações com Se- gundo Membro Descontínuo .....	22
2.6 - Resultados obtidos por Filippov e sua Aplicação aos Sistemas de Controle .....	23
2.7 - Problema de Controle Ótimo .....	35
2.8 - Discussão sobre as Descontinuidades e o Regime de Escorregamento .....	39
CAPÍTULO 3 - SISTEMAS DE CONTROLE A ESTRUTURA VARIÁVEL .....	44
3.1 - Definição de Sistemas de Controle a Estrutura Va- riável .....	44
3.2 - Controle de um Sistema de Segunda Ordem .....	48
3.3 - Síntese de um Controlador a Estrutura Variável para um Sistema Linear Mono-dimensional, com parâmetros Variáveis, e sujeito a perturbações .....	70

CAPÍTULO 4 - INVARIÂNCIA E ESTABILIDADE DOS SISTEMAS DE CONTRO <u>LE</u>	
LE A ESTRUTURA VARIÁVEL .....	96
4.1 - Invariância dos Sistemas de Controle a Estrutura	
Variável .....	96
4.2 - Estabilidade dos Sistemas de Controle a Estrutura	
Variável .....	103
4.3 - Estudo da Estabilidade dos Sistemas descritos por	
Equações Diferenciais com Segundo Membro Descontí-	
nuo .....	106
4.4 - Os Sistemas de Controle a Estrutura Variável e o	
Segundo Método de Liapunov .....	107
CAPÍTULO 5 - CONCLUSÕES, COMENTÁRIOS E SUGESTÕES .....	117
APÊNDICE I - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM SEGUNDO MEMBRO DESCON-	
TÍNUO .....	121
APÊNDICE II - ESTABILIDADE EM RELAÇÃO À MEDIDA .....	124
BIBLIOGRAFIA .....	126

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

Os sistemas de controle em malha fechada devem ser calculados de maneira a satisfazer certos índices de desempenho. De acordo com o caso, um índice de desempenho (funcional objetivo) é escolhido, e o sistema deve ser projetado de maneira a minimizar esse índice.

Não existe uma regra para a escolha do índice de desempenho, mas, de uma maneira geral, deseja-se obter uma precisão tão boa quanto possível, de forma que o erro (desvio entre a referência e a grandeza controlada) sempre aparece na expressão da quele índice.

Além disso, os sistemas de controle em malha fechada devem satisfazer a outras especificações, em geral contraditórias. Por um lado, devem ter um amortecimento suficientemente forte, de maneira que a grandeza controlada não seja submetida a grandes oscilações. Por outro lado, devem ser bastante rápidos, sensíveis às variações do sinal de erro. O que se faz é estabelecer uma solução de compromisso.

A precisão de um sistema de controle em malha fechada pode ser melhorada aumentando-se o ganho do controlador. Entretanto, o aumento do ganho é limitado pelas propriedades dinâmicas do sistema a ser controlado; haveria uma quebra do compromisso estabelecido anteriormente. Em certos casos, o aumento de-



masiado do ganho leva o sistema à instabilidade, e só em alguns casos é possível aumentar bastante o ganho, sem comprometer a estabilidade.

Uma das possibilidades de se aumentar o ganho do regulador sem comprometer as propriedades dinâmicas do sistema, é a introdução da derivada na lei de controle. De qualquer forma, chega-se a um compromisso quanto ao valor do ganho dessa derivada, e, de uma maneira geral, o sistema fica mais lento.

O aumento do ganho não é proibido apenas por questões de estabilidade. Em sistemas reais, quando o ganho aumenta muito (ou deve aumentar muito), entram em jogo as limitações naturais (saturação, preço, etc), e aparece a influência dos pequenos parâmetros, das não linearidades, desprezados de início, no modelo; isto é, a "estrutura fina" do sistema. Sem o conhecimento dessas características, é impossível garantir o aumento do ganho. Ademais, os parâmetros são submetidos a variações aleatórias. Portanto, as possibilidades de realização de sistemas de controle em malha fechada, de alta qualidade, a partir de ganhos elevados, são bastante reduzidas.

Outro intuito quando se pensa em aumentar muito o ganho do controlador, é tornar as propriedades estáticas e dinâmicas do sistema global independentes dos parâmetros do sistema a ser controlado. Isso porque, em certos casos, esses parâmetros variam consideravelmente (ou são mal identificados, o que é equivalente ao nível do projeto), o que implica numa deterioração da dinâmica global. Nesses casos, os sistemas de controle PID clássicos não resolvem

mais o problema, principalmente por causa da limitação que sempre existe no ganho. Uma maneira de resolver esse problema é medir os parâmetros do sistema a ser controlado e corrigir continuamente os parâmetros do controlador (sistemas auto-adaptativos com modelo) . Mas a medida dos parâmetros envolve dificuldades técnicas enormes, e os órgãos de cálculo são complexos, de forma que é difícil a implementação desses sistemas de controle.

Por outro lado, deseja-se, em muitos casos, que os sistemas sejam insensíveis às perturbações (sinais externos indesejáveis). Isso pode ser conseguido através de uma compensação das perturbações. Mede-se as perturbações e introduz-se um sinal no sistema, função dessa medida, de modo a anular o efeito daquelas . Introduce-se, portanto, uma malha aberta de correção no sistema. Mas também é difícil, em muitos casos, medir as perturbações, e conhecer a maneira pela qual elas agem no sistema, de forma que é complicada a implementação desses sistemas de controle.

Então o problema é projetar controladores que garantam o desempenho desejado para uma grande classe de sistemas dinâmicos, com parâmetros variáveis, e continuamente perturbados, isto é, que tornem o comportamento do sistema independente da influência das variações dos parâmetros e das perturbações.

Essas propriedades podem ser obtidas se, ao invés de sistemas com ganhos muito elevados, e compensação de perturbações, usar-se relés operando em regime de escorregamento.

Entretanto, o regime de escorregamento não é característico apenas de sistemas a relé. Ele pode ocorrer em qualquer

sistema dinâmico descrito por um sistema de equações diferenciais com segundo membro descontínuo. Os sistemas de controle a estrutura variável são regidos por este tipo de equação, onde o sinal de controle pode variar de uma maneira descontínua.

Desde 1957 apareceram, na literatura, artigos sobre o assunto, mas só depois de 1962 é que começaram a aparecer as idéias importantes. Em 1960, foi publicado um trabalho do matemático A.F. Filippov [1] sobre equações diferenciais com segundo membro descontínuo, e então o professor Yemel'yanov e sua equipe (Utkin, Taran, Kostyleva, Grichenko, etc), com a assistência do acadêmico Petrov, em Moscou, e o professor E.A. Barbashin [9] e sua equipe (Pechorina, Eidinov, Tabueva, Gerashchenko, Badkov, etc), em Sverdlovsk, iniciaram as pesquisas para a aplicação, em controle, dos resultados obtidos por Filippov. Em 1966, algumas idéias para a aplicação em controle das propriedades dessas equações já haviam sido apresentadas, e começaram então as aplicações práticas.

Este trabalho tem como objetivo uma síntese dos estudos já feitos, com uma caracterização mais definida dos sistemas de controle a estrutura variável, mostrando a potencialidade destes, e procurando fornecer os elementos necessários à sua análise e seu projeto. Ele se divide em tres partes principais:

Na primeira parte é apresentado um resumo da teoria de Filippov, com algumas interpretações e exemplos que caracterizam o seu conceito de solução de uma equação diferencial, e mostram o seu interesse em sistemas de controle. São apresentados especificamente alguns resultados concernentes às equações diferenciais

de segundo membro contínuo por partes, e suas aplicações em controle.

Na segunda parte são definidos os sistemas de controle a estrutura variável, e, através de um exemplo de um sistema de segunda ordem, são evidenciadas as suas características principais. Em seguida é feita uma análise completa do projeto de um controlador a estrutura variável para um sistema linear, com parâmetros variáveis, e continuamente perturbado.

Na terceira parte são analisadas as condições de invariância, e é feito um estudo da estabilidade dos sistemas de controle a estrutura variável. Esse estudo, comparativo, mostra a relação entre as condições do regime de escorregamento, e a estabilidade dos referidos sistemas.

### NOTAÇÃO

$R^n$  - espaço euclidiano de dimensão  $n$

$x$  - vetor do  $R^n$

$x_i$  -  $i$ -ésima componente de  $x$ , para  $i=1,2,\dots,n$

$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$  - produto escalar

$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$  - norma de  $x$

$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}$

$x < y \quad x_i < y_i \quad , \quad i=1,2,\dots,n$

$\underline{x} < \underline{y} \quad x_i < y_i \quad , \quad i=1,2,\dots,n$

Dados dois conjuntos A e B , contidos em  $R^n$  , o pro  
duto cartesiano é definido por:

$$A \times B = \{(x,y) \in R^{2n} \mid x \in A, y \in B\}$$

A função sinal é definida por:

$$\text{sinal } x = \begin{cases} +1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$\exists$  - existe

$\forall$  - para todo

$d(x,y)$  - distância de x a y       $d(x,y) = ||x-y||$

$x^T$  - vetor x transposto

$$x^{(n)} \equiv \frac{d^n x}{dt^n}$$

## CAPÍTULO 2

### APLICAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM SEGUNDO MEMBRO DESCONTÍNUO AOS SISTEMAS DE CONTROLE

Neste capítulo serão apresentados os principais resultados obtidos por A.F. Filippov<sup>[1]</sup> sobre as equações diferenciais com segundo membro descontínuo, e mostradas suas aplicações aos sistemas de controle.

Filippov apresentou uma nova definição de solução de uma equação diferencial, e estudou as propriedades dessa solução (existência, unicidade, prolongabilidade, dependência contínua das condições iniciais, etc...). O seu conceito de solução resolve o problema da prolongabilidade de uma solução quando esta se encontra numa superfície de descontinuidade (definida pelo segundo membro da equação) e não pode deixá-la. Pela definição de Filippov, quando isto ocorre, a solução é prolongável, de uma maneira determinada, ao longo da superfície de descontinuidade. O movimento na superfície, como prolongamento da solução, é chamado escorregamento, e tem propriedades interessantes que podem ser aplicadas aos sistemas de controle.

#### 2.1 - Definição de Solução de uma Equação Diferencial

Seja a equação:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) \quad (2.1)$$

onde:

$$x(t) \in G, \quad G \subset \mathbb{R}^n$$

$$x : (t_1, t_2) \rightarrow G$$

$$t \mapsto x(t)$$

$$f : G \times (t_1, t_2) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x, t \mapsto f(x, t)$$

Classicamente, diz-se que  $x(t)$  é solução da equação (2.1) se  $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$  e  $x(t) \in G$ ;  $\forall t \in (t_1, t_2)$ .

Para garantir a existência e a unicidade da solução de (2.1), no sentido clássico, exige-se que a função  $f$  seja contínua, e satisfaça a uma condição de Lipschitz para todo  $x, t$ , isto é, que exista  $k > 0$  tal que

$$||f(x, t) - f(y, t)|| \leq k ||x - y|| \quad x, y \in G, \quad t \in (t_1, t_2)$$

Portanto, se  $f$  é descontínua, não se pode garantir a existência da solução clássica da equação (2.1). Entretanto, muitos sistemas físicos são modelados através de equações diferenciais com segundo membro descontínuo, como, por exemplo, os sistemas de controle em malha fechada a relé. Daí o interesse de se elaborar uma teoria que permita o estudo dessas equações, e possibilite pois uma melhor compreensão do comportamento dos sistemas físicos por elas descritos.

## 2.2 - Definição de Solução de Filippov

Filippov estendeu o conceito da solução de uma equação diferencial do tipo da (2.1). Segundo sua definição,  $x(t)$  é solução da equação (2.1) se  $\dot{x}(t)$  pertence a um certo conjunto

$K\{f(x(t), t)\}$  ; definido por :

$$K\{f(x(t), t)\} = \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{\mu N = 0} \overline{\text{co}} f(U_\delta(x(t)) - N, t) \quad (2.2)$$

t fixado

onde:

$N$  : conjunto de medida nula;

$\mu$  : medida de Lebesgue

$U_\delta(x(t))$  : vizinhança, de raio  $\delta$ , do ponto  $x(t)$ , isto é:

$$U_\delta(x(t)) = \{y \in G \subset \mathbb{R}^n \mid ||y - x(t)|| < \delta\}$$

$\overline{\text{co}}$  : aderência da envoltória convexa.

No caso em que  $f$  é contínua,  $K\{f(x(t), t)\} = \{f(x(t), t)\}$ , e então a solução de Filippov coincide com a solução clássica.

Será indicada em seguida a idéia da prova desse fato.

Suponha, por absurdo, que  $f$  é contínua em  $x(t)$ , mas existe  $y \in K\{f(x(t), t)\}$ ,  $y \neq f(x(t), t)$ . Seja  $\varepsilon > 0$  tal que  $y \notin U_\varepsilon(f(x(t), t))$ . Por continuidade de  $f$  em  $x(t)$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $f(U_\delta(x(t), t)) \subset \overline{\text{co}} f(U_\delta(x(t), t)) \subset U_\varepsilon(f(x(t), t))$ .

Pela definição de  $\varepsilon$  e pela relação acima, resulta:

$y \notin \overline{\text{co}} f(U_\delta(x(t), t))$ . Em particular, se  $N \subset \mathbb{R}^n$  tem medida nula:  $y \notin \overline{\text{co}} f(U_\delta(x(t)) - N, t)$ , o que contradiz a hipótese de  $y \in K\{f(x(t), t)\}$ . Pode-se mostrar que  $f(x(t), t) \in K\{f(x(t), t)\}$ , o que implicará em que  $K\{f(x(t), t)\} = \{f(x(t), t)\}$ .

De uma maneira geral, se  $f$  é descontínua, o conjunto  $K\{f(x(t), t)\}$  não será necessariamente um ponto. Esse conjunto (imagem) dependerá da maneira pela qual as trajetórias se aproxi-



mam do conjunto  $N$  de medida nula, e também do tipo de conjunto  $N$ . No caso dos sistemas de controle a estrutura variável nos quais ocorre o escorregamento, o conjunto  $K\{f(x(t),t)\}$ , em pontos da superfície de descontinuidade, é uma combinação convexa de dois vetores.

Seja qual for a situação, supõe-se sempre que, para quase todo  $t \in (t_1, t_2)$ , a parte do domínio de definição da função  $f$  que está numa vizinhança de dimensão  $n$  arbitrariamente pequena do ponto  $x(t)$ , no plano  $t=\text{constante}$ , tem medida positiva. Caso contrário, o conjunto  $K\{f(x(t),t)\}$  seria vazio, e a definição da solução não teria sentido. A definição de Filippov é a seguinte:

"Uma função vetorial  $x$ , definida no intervalo  $(t_1, t_2)$ , é dita solução da equação (2.1), se ela é absolutamente contínua e se para quase todo  $t \in (t_1, t_2)$ , e para  $\delta > 0$  arbitrário, o vetor  $\frac{dx}{dt}$  pertence ao menor conjunto convexo fechado (do espaço de dimensão  $n$ ) que contém todos os valores da função vetorial  $f$ , quando  $x$  assume quase todos os valores da vizinhança de raio  $\delta$  do ponto  $x(t)$ , no espaço dos  $x$  ( $t$  fixado)".

Deve-se ter portanto:

$$\frac{dx(t)}{dt} \in K\{f(x(t),t)\} \quad \text{para quase todo } t \in (t_1, t_2)$$

### 2.3 - Interpretação da Definição da Solução de Filippov

Para melhor compreensão da definição, será analisado um sistema de segunda ordem e determinado o conjunto

$K\{f(x(t), t)\}$  em pontos de descontinuidade.

Considere-se o sistema:

$$\dot{x} = f(x)$$

$$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto x(t)$$

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$x \mapsto f(x)$$

Suponha que  $f$  apresenta uma descontinuidade de primeira espécie em  $x^a \in \mathbb{R}^2$ .

Será tomada uma condição inicial  $x^0 \in \mathbb{R}^2$  tal que a trajetória, no espaço dos  $x$ , passe, à medida que o tempo evolue, pelo ponto  $x^a \in \mathbb{R}^2$ . A figura (2.1 a) mostra uma possível configuração da trajetória.

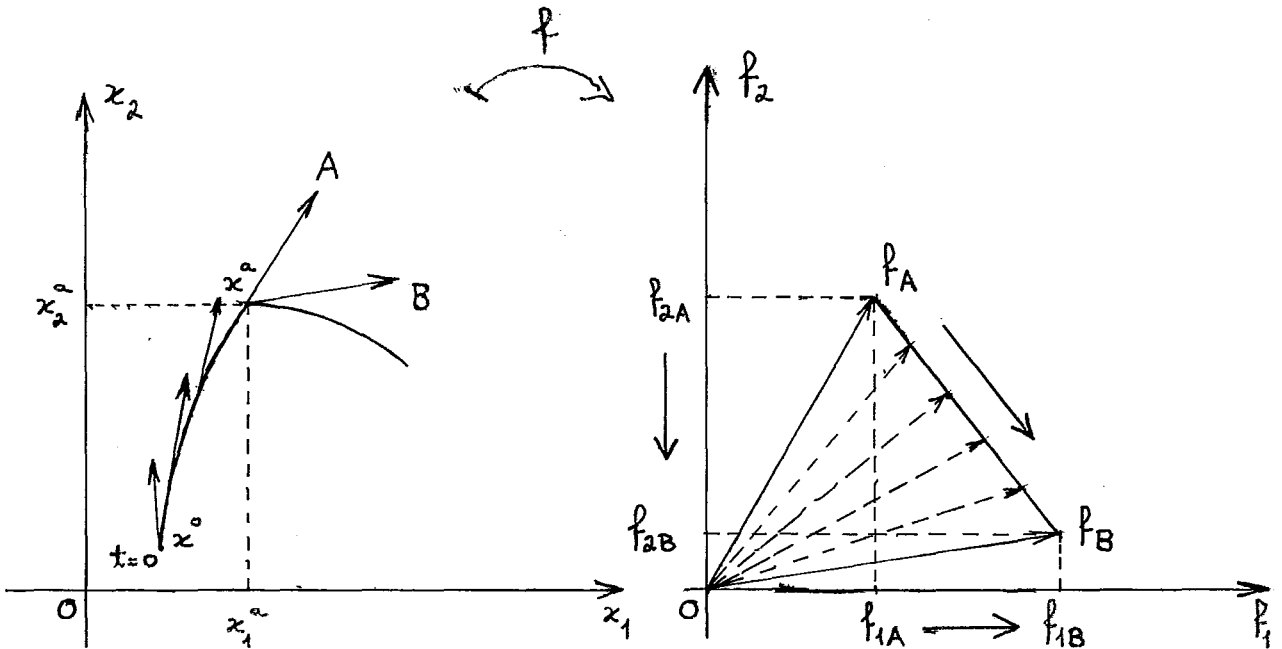


Figura 2.1 a

Figura 2.1 b

Em cada ponto da trajetória, o vetor velocidade  $f(x(t))$  é tangente à mesma naquele ponto. Quando se chega ao ponto  $x^a$ , a tangente não mais existe; tudo se passa como se, ao se passar pelo ponto  $x^a$ , o vetor velocidade mudasse abruptamente (com velocidade infinita) da posição A para a posição B. No contradomínio da  $f$  ter-se-ia a composição de dois movimentos: um da  $f_{2A}$  até  $f_{2B}$ , e outro de  $f_{1A}$  até  $f_{1B}$ . O movimento resultante seria, pois, sobre o segmento que une as extremidades dos vetores  $f_A$  e  $f_B$ , no sentido de A para B. Esse movimento se processa em um intervalo de tempo nulo, isto é, no instante  $t_a$ . Então, no instante  $t_a$ , sabe-se que o vetor  $f(x(t_a))$  tem sua extremidade no segmento que une as extremidades de  $f_A$  e  $f_B$ . Este segmento é o conjunto  $K\{f(x(t))\}$  da definição de Filippov.

Considere-se então o sistema:

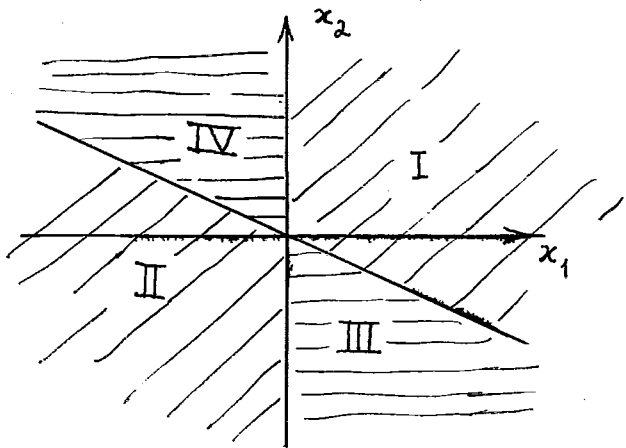
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -4x_1 \operatorname{sign} \{x_1(x_2+x_1)\} - 2x_1 \end{cases} \quad (2.3)$$

As retas  $x_2+x_1 = 0$  e  $x_1 = 0$ ,  $S_1$  e  $S_2$  respectivamente, definem quatro regiões no espaço dos  $x(t)$ :

$$\begin{array}{llll} \text{I} & \begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2+x_1 > 0 \end{cases} & \text{II} & \begin{cases} x_1 < 0 \\ x_2+x_1 < 0 \end{cases} & \text{III} & \begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2+x_1 < 0 \end{cases} & \text{IV} & \begin{cases} x_1 < 0 \\ x_2+x_1 > 0 \end{cases} \end{array}$$

Seja o ponto  $x^a = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$  e considere-se o problema de determinar o conjunto  $K\{f(x^a)\}$ .

Figura 2.2



O ponto considerado encontra-se em  $S_1$ , que é um conjunto de medida nula, e portanto não interessa a definição de  $f$  naquele ponto.

Seja

$$U_\delta(x^a(t)) = \{x(t) \in \mathbb{R}^n \mid \|x(t) - x^a(t)\| < \delta\}, \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$$

e

$$s_1 = x_2 + x_1$$

Para  $x(t) \in U_\delta(x^a)$  tais que  $s_1 > 0$  tem-se :

$$f_1^+ = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ s_1 > 0}} x_2 = 1$$

$$f_2^+ = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ s_1 > 0}} \{-4x_1 \sin[ x_1(x_2+x_1) ] - 2x_1\} = -4(-1)(-1) - 2(-1) = -2$$

Para  $x(t) \in U_\delta(x^a)$  tais que  $s_1 < 0$ , tem-se :

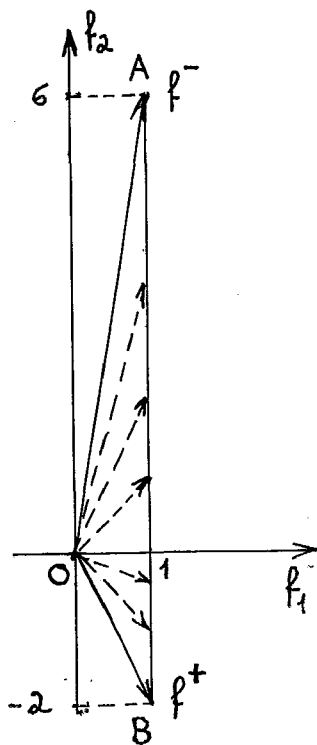
$$f_1^- = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ s_1 < 0}} x_2 = 1$$

$$f_2^- = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ s_1 < 0}} \{-4x_1 \operatorname{sinal} [x_1(x_2+x_1)] - 2x_1\} = -4(-1)(1) - 2(-1) = 6$$

Nota: Tomando o limite quando  $\delta \rightarrow 0$ , acha-se a interseção de todos os  $f(U_\delta(x^a))$ ,  $\delta > 0$ , isto é, acha-se:

$$\bigcap_{\delta > 0} f(U_\delta(x^a))$$

que é a interseção de todas as imagens das vizinhanças de raio  $\delta > 0$ , do ponto  $x(t)$  considerado, excetuando os conjuntos de medida nula que é a reta  $S_1$ .



Segundo Filippov, o vetor velocidade tem sua extremidade sobre o segmento  $AB$ , que une as extremidades de  $f^-$  e  $f^+$ .

Portanto, nesse caso :

$$K\left\{f\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)\right\} = \overline{AB}$$

ou seja :

Figura 2.3

$$K\left\{f\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)\right\} = \left\{ y \mid y = \lambda f^+\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) + (1-\lambda) f^-\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right), \lambda \in [0,1] \right\}$$

$$K\left\{f\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)\right\} = \left\{ y \mid y = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + (1-\lambda) \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \lambda \in [0,1] \right\}$$

Obs.: Note que  $f_1^+ = f_1^-$  nesse caso.

Seja agora o ponto  $x^b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , e considere-se o problema de determinar o conjunto  $K\{f(x^b)\}$ . O novo ponto encontra-se em  $S_2$ , que é um conjunto de medida nula, e portanto não interessa o valor da função  $f$  naquele ponto, para o cálculo de  $K$ .

Seja :

$$U_\delta(x^b) = \{x(t) \in \mathbb{R}^n \mid ||x(t) - x^b(t)|| < \delta, \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\}$$

e

$$s_2 = x_1$$

Para  $x(t) \in U_\delta(x^b)$  tais que  $s_2 > 0$ , tem-se :

$$f_1^+ = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ s_2 > 0}} x_2 = 1$$

$$f_2^+ = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ s_2 > 0}} \{-4x_1 \sin[x_1(x_2+x_1)] - 2x_1\} = -4 \times 0 \times 1 - 2 \times 0 = 0$$

Para  $x(t) \in U_\delta(x^b)$ , tais que  $s_2 < 0$ , tem-se :

$$f_1^- = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ s_2 < 0}} x_2 = 1$$

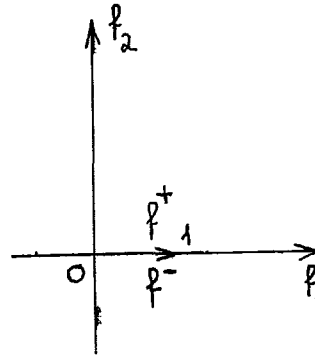
$$f_2^- = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ s_2 < 0}} \{-4x_1 \sin[x_1(x_2+x_1)] - 2x_1\} = -4 \times 0 \times (-1) - 2 \times 0 = 0$$

Nesse caso, a função  $f$  é descontínua no ponto  $x(t) = x^b$ , e o conjunto  $K\{f(x^b, t)\}$  reduz-se a um ponto, pois  $f_1^+ = f_1^- = 1$  e  $f_2^+ = f_2^- = 0$ . Logo,

$$K\{f(x^b(t))\} = \{f^+\} = \{f^-\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} .$$

O "segmento" que une as extremidades de  $f^-$  e  $f^+$  reduz-se a um ponto.

Figura 2.4



## 2.4 - Razões para o estudo de equações diferenciais com segundo membro descontínuo

Filippov generalizou o conceito de solução de uma equação diferencial. Na sua definição não é necessário que  $f$  seja contínua; é necessário que  $f$  seja mensurável. No seu estudo, Filippov foi motivado por problemas de controle, que naturalmente levam a equações com segundo membro descontínuo.

Considere-se um sistema de controle da forma:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(x(t))) \quad (2.4)$$

$$x : R \rightarrow R^n \quad ; \quad f : R^{n+r} \rightarrow R^n \quad ;$$

$$t \mapsto x(t) \quad \quad \quad z, y \mapsto f(z, y)$$

$$u : R^n \rightarrow \Omega$$

$$z \mapsto u(z)$$

$$S \rightarrow \text{alvo} \quad S \subset [0, \infty) \times R^n, \quad \Omega \subset R^n.$$

Se  $f$  é limitada e satisfaz a uma condição de Lipschitz em ambos os argumentos, e  $u$  satisfaz também a uma condição de Lipschitz, então o problema do valor inicial da equação (4), com  $x(0) = x^0$ , tem solução única. No instante  $t$ , a solução terá um valor  $\phi(t, 0, x^0)$ . Suponha que  $\phi(t_1, 0, x^0) \in S$ . O problema considerado é o seguinte:

Se  $\dim S < n$ , existirá um valor  $t(x)$ ,  
 $\forall x \in U(x^0) \subset R^n$ ,  $U(x^0)$  sendo uma vizinhança de  $x^0$ ,  $0 \leq t(x) < \infty$ ,  
 tal que  $\phi(t(x), 0, x) \in S$ ?

Do ponto de vista de sistemas de controle seria interessante que essa pergunta tivesse uma resposta afirmativa. Entretanto, para  $u$  satisfazendo a uma condição de Lipschitz ( $u$  contínua), demonstra-se [2] que a resposta é negativa; o conjunto de pontos iniciais a partir do qual  $S$  pode ser atingido, tem dimensões menor do que  $n$ .

Logo, é importante o estudo das equações diferenciais com segundo membro descontínuo.



Seja agora o problema da síntese de um controle ótimo para um caso particular de um sistema de segunda ordem. Através desse exemplo se pode visualizar melhor as características da solução no sentido de Filippov, comparando-a com a solução clássica.

Seja o sistema :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \\ \dot{x}_2 = u_2 \end{cases} \quad (2.5)$$

com  $0 \leq |u_1| + |u_2| \leq 1$  ,  $x(0) \in \mathbb{R}^2$

O problema consiste em escolher  $u$  de maneira a trazer o sistema de uma condição inicial qualquer até o alvo:

$$S = \{(t, x_1, x_2) \mid t \geq 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0\}$$

num tempo mínimo.

Supondo  $u$  constante, e integrando as equações dadas, tem-se:

$$x_1(t) = u_1 t + x_1(0)$$

$$x_2(t) = u_2 t + x_2(0)$$

No alvo

$$0 = u_1 t + x_1(0) \quad -u_1 t = x_1(0) \quad |u_1| t = |x_1(0)|$$

$$0 = u_2 t + x_2(0) \quad -u_2 t = x_2(0) \quad |u_2| t = |x_2(0)|$$

( $t > 0$ )

$$(|u_1| + |u_2|) t = |x_1(0)| + |x_2(0)|$$

Mas  $\text{Max}(|u_1| + |u_2|) = 1$  . Então  $t_{\min} = |x_1(0)| + |x_2(0)|$

Considere-se duas estratégias que darão o mesmo tempo mínimo encontrado acima:

### Estratégia 1

$$u^1(x) = \begin{cases} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} & \text{se } x_1 > 0, \quad x_2 \geq 0 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} & \text{se } x_1 \leq 0, \quad x_2 > 0 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \text{se } x_1 < 0, \quad x_2 \leq 0 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \text{se } x_1 \geq 0, \quad x_2 < 0 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \text{se } x_1 = 0, \quad x_2 = 0 \end{cases}$$

Graficamente, no espaço dos  $x$  , tem-se:

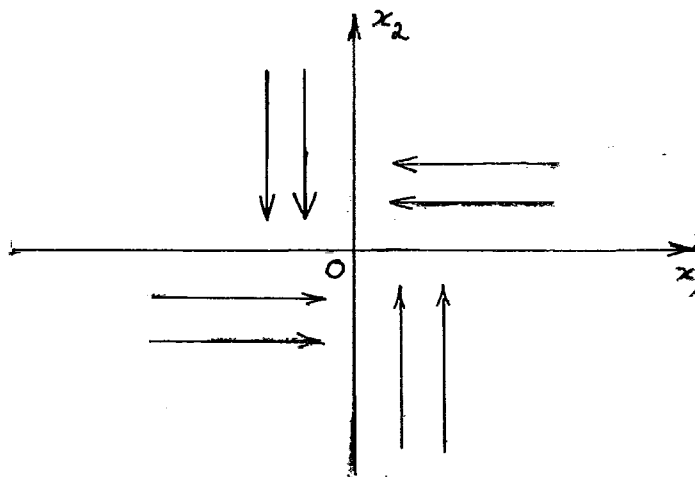


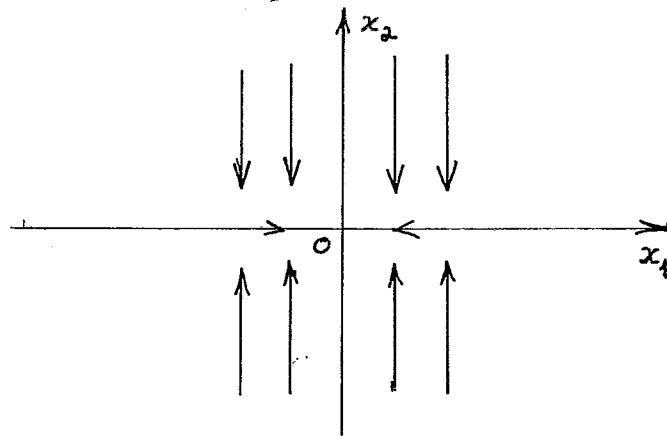
Figura 2.5

Estratégia 2

$$u^2(x) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} & \text{se } x_2 > 0 \\ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} & \text{se } x_2 = 0, \quad x_1 > 0 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \text{se } x_2 = 0, \quad x_1 < 0 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \text{se } x_2 < 0 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \text{se } x_2 = 0, \quad x_1 = 0 \end{cases}$$

Graficamente, no espaço dos  $x$ , tem-se :

Figura 2.6



Em ambas as estratégias, para qualquer condição inicial, a solução clássica das equações existe, é única, depende continuamente das condições iniciais, e atinge a origem num tempo mínimo.

Entretanto, se se considerar a solução no sentido de Filippov, as propriedades acima só serão todas verdadeiras na estratégia 1. No caso da estratégia 2, as soluções de Filippov "terminam" (chegam a um ponto final, ou terminal) quando um estado no

qual  $x_2=0$  é alcançado. Isto acontece porque  $u_1^2(x)$  é quase sempre zero, isto é, é zero, exceto num conjunto de medida nula, que é o eixo dos  $x_1$ .

Do ponto de vista prático, como o sinal de controle é determinado a partir de uma medida do estado, não faz sentido pensar que conjuntos de estados de medida nula influenciem a solução. Sob esse ponto de vista, o conceito de solução de Filippov oferece uma noção mais realista.

De fato, pois para a implementação prática da estratégia 2, os instrumentos de medida deveriam ter precisão infinita, e os órgãos de comutação deveriam ter retardo nulo. Isso seria impossível, e o máximo que se poderia fazer, seria utilizar um dispositivo de comutação a três valores, que daria:

$$\begin{aligned} u_1^2(x) &= -1 && \text{se } x_2 \in (-\varepsilon, \varepsilon), \varepsilon > 0, \text{ e } x_1 > 0 \\ u_1^2(x) &= 1 && \text{se } x_2 \in (-\varepsilon, \varepsilon), \varepsilon > 0, \text{ e } x_1 < 0 \\ u_1^2(x) &= 0 && \text{se } x_2 \notin (-\varepsilon, \varepsilon), \varepsilon > 0, \text{ ou seja, se } \begin{cases} x_2 < -\varepsilon \\ \text{ou} \\ x_2 > \varepsilon \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, do ponto de vista prático, a estratégia 1, que admite soluções de Filippov, é mais importante. Com ela se pode usar órgãos de comutação a dois valores,

No seu artigo, Hermes [2] introduz o conceito de estabilidade com relação à medida (apêndice II), e prova que se  $f$  é estável em relação à medida, então toda solução clássica é uma solução de Filippov.

No exemplo acima, apenas a estratégia 1 conduz a um sistema estável em relação à medida.

## 2.5 - O segundo método de Liapunov e as equações c/segundo membro descontínuo

Um outro caminho que conduz às equações com segundo membro descontínuo, é o projeto de sistemas de controle a partir do segundo método de Liapunov( [3], pag. 389).

Uma vantagem do emprego desse método em projeto, é que obtêm-se, automaticamente, um sistema de controle estável.

Considere-se o sistema:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.6)$$

onde

$$|u_i(t)| \leq a_i < \infty \quad i=1,2,\dots,m \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

O problema é levar qualquer estado inicial para a origem, escolhendo  $u(t)$  de maneira a otimizar o comportamento transitório do sistema.

Em [3] é apresentado um método que fornece um procedimento simples de projeto, mas de significado prático. O método é o seguinte:

Escolha  $Q$  definida positiva arbitrariamente, e pela relação:

$$A^T P + PA = -Q \quad (\text{Teorema de Liapunov})$$

obtenha  $P$  definida positiva.

Obtem-se então  $V(x) = x^T P x$ , que é uma função de Liapunov para o sistema (2.6), com  $u(t) \equiv 0$ .

Agora escolha  $u(t)$  de maneira que  $\dot{V}(x)$  seja a mais negativa possível. Tem-se :

$$\dot{V}(x(t),t) = -x^T Q x + 2u^T(t) B^T P x(t)$$

Logo,  $\dot{V}(x(t),t)$  será mais negativa quando:

$$u_i^*(t) = -a_i \text{ sinal}\{B^T P x(t)\}_i, \text{ onde } \text{sinal } x = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Obs.: Esse método não conduz necessariamente ao ótimo quando  $V$  também depende de  $u$ , pois:

$$\min_u \left\{ \frac{V(x(t),u)}{-\dot{V}(x(t),u)} \right\} \leq V(x(t),\bar{u}) \quad \Rightarrow \quad \min_u \frac{1}{-\dot{V}(x(t),u)}$$

onde  $\bar{u}$  é o minimizador de  $(-\dot{V}(x(t),u))^{-1}$ .

Substituindo o valor de  $u(t)$  encontrado acima, na equação (2.6), obtem-se então uma equação diferencial com segundo membro descontínuo.

No caso, chega-se a um sistema de controle a relê ; mais adiante ver-se-á que, colocando  $u_i(t) = -a_i x_i(t) \text{ sinal}\{B^T P x(t)\}_i$ , sendo  $\{B^T P x(t)\}_i = 0$  uma superfície definida no espaço dos  $x(t)$ , se pode obter sistemas de controle de melhor desempenho: os sistemas de controle a estrutura variável.

## 2.6 - Resultados obtidos por Filippov, e sua aplicação aos sistemas de controle

Seja o sistema (2.1)

$$\dot{x} = f(x,t)$$

Partindo da hipótese que  $f$  é mensurável, e satisfaz a uma condição B (Apêndice I), Filippov demonstrou a existência

local da solução. Em seguida demonstrou sua prolongabilidade, e outras propriedades.

No final do artigo, ele estudou as equações nas quais  $f$  é contínua por partes. Essas equações são importantes no estudo de sistemas físicos, como por exemplo, os sistemas de controle a relê.

Será visto agora como aplicar os resultados obtidos sobre as equações nas quais  $f$  é contínua por partes, ao estudo dos sistemas de controle. Em particular, será ressaltado o fenômeno do escorregamento.

Considere-se a equação (2.1). Suponha-se que o conjunto de pontos de descontinuidade de  $f$  forma uma superfície suave  $S$  definida por:

$$S = \{x \in G \mid s(x) = 0\} \quad (2.7)$$

onde

$$\begin{aligned} s : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \text{ é de classe } C^2 \\ x &\mapsto s(x) \end{aligned}$$

Essa superfície divide  $G$  em dois domínios, supostos não vazios:

$$\begin{aligned} G^- &= \{x \in G \mid s(x) < 0\} \\ G^+ &= \{x \in G \mid s(x) > 0\} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Suponha-se que existem os limites de  $f$  quando  $x$  se aproxima de qualquer ponto de  $S$ , por  $G^-$  ou  $G^+$ , definindo as funções :

$$f^- : S \times (t_1, t_2) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x, t \mapsto f^-(x, t) = \lim_{\substack{y \rightarrow x \in S \\ y \in G^-}} f(y, t)$$

$$f^+ : S \times (t_1, t_2) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x, t \mapsto f^+(x, t) = \lim_{\substack{y \rightarrow x \in S \\ y \in G^+}} f(y, t)$$

$$h : S \times (t_1, t_2) \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (2.9)$$

$$x, t \mapsto h(x, t) = f^+(x, t) - f^-(x, t)$$

Considere-se  $f_N^-$  e  $f_N^+$  as projeções de  $f^-$  e  $f^+$ , respectivamente, na normal à superfície  $S$  :

$$f_N^- : S \times (t_1, t_2) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x, t \mapsto f_N^-(x, t) = \langle \nabla s(x), f^-(x, t) \rangle$$

$$f_N^+ : S \times (t_1, t_2) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x, t \mapsto f_N^+(x, t) = \langle \nabla s(x), f^+(x, t) \rangle$$

Observe-se que o sentido da normal, dado por  $\nabla s(x)$ , é de  $G^-$  para  $G^+$ .

Suponha-se que  $f$  é diferenciável em  $G^- \cup G^+$ , e que exista  $K > 0$  tal que :

$$\left| \frac{\partial f_i(x, t)}{\partial x_j} \right| \leq K \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad \begin{matrix} \forall x \in G^- \cup G^+ \\ \forall t \in (t_1, t_2) \end{matrix}$$

Finalmente, suponha-se que  $f$  satisfaça à condição B (Apêndice I). A partir dessas hipóteses, Filippov demonstrou o seguinte teorema :



TEOREMA 2.1 - Seja a equação (2.1) satisfazendo às hipóteses acima. Suponha que  $s$  é tal que a equação  $s(x)=0$  pode ser resolvida, numa vizinhança de cada ponto de  $S$ , para uma de suas coordenadas, sendo a solução dada por  $x_i = g(x_1, \dots, x_{i+1}, \dots, x_n)$ , onde a função  $g$  é duas vezes continuamente diferenciável. Suponha que as funções  $f_N^-$  e  $f_N^+$  são contínuas em  $x$ , para  $x \in S$ , e que  $h$  é continuamente diferenciável. Se pelo menos uma das desigualdades  $f_N^-(x,t) > 0$  ou  $f_N^+(x,t) < 0$  é satisfeita em cada ponto de  $S$ , não necessariamente a mesma em todos os pontos da superfície, então, no domínio  $G$ , ter-se-á unicidade unilateral e dependência contínua da solução \* nas condições iniciais.

\* Observação : A solução existe, pois  $f$  satisfaz à condição B, por hipótese.

Suponha-se agora que as condições  $f_N^-(x,t) > 0$  e  $f_N^+(x,t) < 0$  são satisfeitas simultaneamente em todo ponto de  $S$ .

Intuitivamente se pode ver que, para condições iniciais tomadas sobre a superfície  $S$ , o estado não poderá mais sair de  $S$ .

Em seguida será mostrado que, se aquelas duas condições forem satisfeitas simultaneamente, a superfície  $S$  será atrativa, para condições iniciais tomadas numa sua vizinhança. No caso de condições iniciais em  $S$ , a solução clássica não existe, e esses pontos sobre  $S$  são chamados de pontos finais, ou pontos terminais [5].

Por hipótese,  $s$  é de classe  $c^2$ , e se pode definir:

$$\dot{s}(x,t) = \langle \nabla s(x), f(x,t) \rangle \quad (2.10)$$

No limite, quando se se aproxima de  $S$  por  $G^-$  e  $G^+$ , ter-se-á, respectivamente:

$$\lim_{\substack{y \rightarrow x \in S \\ y \in G^-}} \dot{s}(y,t) = \lim_{\substack{y \rightarrow x \in S \\ y \in G^-}} \langle \nabla s(y), f(y,t) \rangle = \langle \nabla s(x), f^-(x,t) \rangle = f_N^-(x,t).$$

$$\lim_{\substack{y \rightarrow x \in S \\ y \in G^+}} \dot{s}(y,t) = \lim_{\substack{y \rightarrow x \in S \\ y \in G^+}} \langle \nabla s(y), f(y,t) \rangle = \langle \nabla s(x), f^+(x,t) \rangle = f_N^+(x,t).$$

Como, por hipótese  $f_N^-(x,t) > 0$  e  $f^+(x,t) < 0$  em  $S$ , da definição de limite e das expressões acima conclui-se que:

$$\begin{aligned} \forall x_s \in S, \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \text{tal que} \\ \dot{s}(y,t) > 0 \quad \forall y \in G^- \cap B_\varepsilon(x_s) \\ \dot{s}(y,t) < 0 \quad \forall y \in G^+ \cap B_\varepsilon(x_s) \end{aligned}$$

onde

$$B_\varepsilon(x_s) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x - x_s|| < \varepsilon\} \quad \varepsilon > 0, \quad x_s \in S$$

Como  $y \in G^- \cap B_\varepsilon(x_s)$  implica em  $s(y) < 0$  e  $y \in G^+ \cap B_\varepsilon(x_s)$  implica em  $s(y) > 0$ , tem-se

$$\begin{aligned} \forall x_s \in S \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \text{tal que} \\ s(y)\dot{s}(y,t) < 0 \quad \forall y \in B_\varepsilon(x_s) - S \end{aligned} \quad (2.11)$$

Mas se  $\dot{s} < 0$  numa vizinhança de  $S$ , então  $S$  será atrativa para pontos pertencentes a essa vizinhança. Entretanto, não necessariamente (para condições iniciais tomadas nessa vizinhança

ça) as trajetórias alcançarão a superfície  $S$  em tempo finito.

Uma condição suficiente para que as trajetórias alcancem  $S$  em tempo finito, é dada na seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 2.1 - Suponha-se que as hipóteses do teorema 2.1 são satisfeitas. Suponha-se ainda que existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\forall x \in G$

$$s(x)\dot{s}(x,t) = s(x) \langle \nabla s(x), f(x,t) \rangle \leq - |s(x)| \varepsilon$$

Então, para qualquer estado inicial em  $G$ , a solução da equação (2.1) alcança a superfície  $S$  em tempo finito.

#### Demonstração

Seja  $x^0 \in G$  um estado inicial qualquer. Pelo teorema 2.1, existe uma única solução  $x(t)$  da equação (2.1), passando por  $x^0$  em  $t_0$ .

Se  $x^0 \in S$ , nada há a provar.

Suponha-se que  $x^0 \in G^+$ . Então, pela hipótese da proposição, tem-se:

$$\dot{s}(x(t)) \leq -\varepsilon$$

Logo,  $\forall t \geq t_0$

$$\begin{aligned} s(x(t)) &= s(x^0) + \int_{t_0}^t \dot{s}(x(\tau)) d\tau \\ &\leq s(x^0) - \varepsilon(t-t_0) \end{aligned}$$

Portanto, para  $t \geq t_0 + \frac{s(x^0)}{\varepsilon}$  resulta  $s(x(t)) \leq 0$ .

Finalmente, como  $s$  é contínua, a solução é absolutamente contínua e  $s(x^0) > 0$ , então existe  $T \in \mathbb{R}$ ,  $t_0 \leq T \leq t_0 + \frac{s(x^0)}{\varepsilon}$  tal que  $s(x(T)) = 0$ , ou seja,  $x(T) \in S$ .

A demonstração é análoga no caso em que  $x^0 \in G^-$ .

Observe-se a hipótese da proposição (2.1) que implica em  $s\dot{s} < 0$ , e pelo método de Liapunov (Capítulo 4), se pode mostrar que a superfície  $S$  é atrativa.

Por outro lado, se  $f$  apresenta uma descontinuidade de primeira espécie [14]  $\forall x \in S$ , tal que  $f^-(x,t) \neq \lambda f^+(x,t)$ ,  $\lambda \neq 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , então:

$$s\dot{s} < 0 \quad \forall x \in B_\varepsilon(x_S) \cap (G^- \cup G^+) \quad \forall x_S \in S \implies f_N^-(x,t) > 0 \quad \text{ou} \\ f_N^+(x,t) < 0$$

pois os limites  $f^-$  e  $f^+$  quando se se aproxima de  $S$  por  $G^-$  e  $G^+$ , respectivamente, têm valores diferentes, e portanto  $f_N^-(x,t)$  e  $f^+(x,t)$  não poderiam ser ambos nulos. Logo, pelo teorema 2.1, a solução de Fillipov é única em  $G$ .

De qualquer maneira é fácil verificar se as condições do teorema (2.1), isto é,  $f_N^-(x,t)$  e  $f_N^+(x,t) < 0$ , são satisfeitas.

Considere-se, por exemplo, o sistema (2.3) e seja o problema de verificar se a solução de Filippov é única, para pontos sobre a superfície de descontinuidade  $S_1$  (exceto a origem).

Tem-se:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -4x_1 \operatorname{sign}\{x_1(x_2+x_1)\} - 2x_1 \end{cases} \quad (2.3)$$

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid s_1(x) = x_2 + x_1 = 0\}$$

Os limites  $f^-(x)$  e  $f^+(x)$  de  $f(x)$ , quando  $x \rightarrow S_1$ , são:

$$f^-(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ 2x_1 \end{bmatrix} \quad \text{se } x_1 > 0 ; \quad f^-(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -6x_1 \end{bmatrix} \quad \text{se } x_1 < 0$$

$$f^+(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -6x_1 \end{bmatrix} \quad \text{se } x_1 > 0 ; \quad f^+(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ 2x_1 \end{bmatrix} \quad \text{se } x_1 < 0$$

O vetor normal a  $S_1$  é dado por:

$$N = \nabla s_1(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

As projeções  $f_N^-(x)$  e  $f_N^+(x)$  serão, portanto:

$$f_N^-(x) = \langle N, f^-(x) \rangle = \begin{cases} x_1 & \text{se } x_1 > 0 \\ -7x_1 & \text{se } x_1 < 0 \end{cases} \quad \forall x \in S$$

$$f_N^+(x) = \langle N, f^+(x) \rangle = \begin{cases} -7x_1 & \text{se } x_1 > 0 \\ x_1 & \text{se } x_1 < 0 \end{cases} \quad \forall x \in S$$

Note-se que,  $\forall x \in S_1$ ,  $x_2 = -x_1$ .

Logo, as condições  $f_N^-(x) > 0$  e  $f_N^+(x) < 0$  são satisfeitas  $\forall x \in S_1 - \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ , e a solução de Filippov é única.

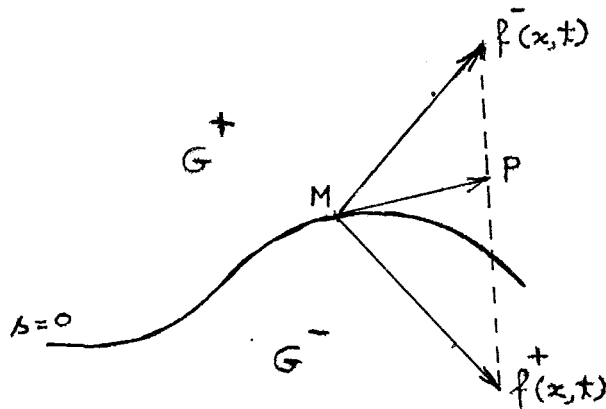
Uma vez em  $S_1$ , o estado não poderá mais abandoná-la, e qualquer movimento posterior só poderá ocorrer dentro da superfície, que nesse caso será chamada de superfície de escorregamento.

Resumindo os resultados, se pode enunciar o seguinte teorema:

TEOREMA 2.2 - Seja o sistema (2.1) tal que  $\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| \leq K$ ,  $K \in \mathbb{R}$ ,  $K > 0$ , no qual  $f$  apresenta uma descontinuidade de primeira espécie em pontos de uma superfície  $S$  definida por  $S = \{x \in G \mid s(x) = 0\}$ , sendo  $s$  como no teorema (2.1), tal que  $f^-(x, t) \neq \lambda f^+(x, t)$ ,  $\lambda \neq 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Se  $f$  satisfaz a condição B, e se numa vizinhança de  $S$  a desigualdade  $s \dot{s} < 0$  é verificada, e a função  $h$  é continuamente diferenciável, então a solução existirá, será única unilateralmente, dependerá continuamente das condições iniciais, e, se para  $t = \bar{t}$ ,  $x(\bar{t}) \in S$ , então  $\forall t > \bar{t}$ ,  $x(t) \in S$ .

Note-se agora o que acontece quando a solução atinge a superfície  $S$ . Intuitivamente é fácil notar que a solução prolongar-se-á pela superfície, sendo o vetor velocidade (MP) (figura 2.7) sempre tangente à superfície.

Figura 2.7



Pela definição de Filippov, a extremidade (P) do vetor velocidade está sobre o segmento que une as extremidades de  $f^-(x, t)$  e  $f^+(x, t)$ . A partir desses dois fatos, Filippov [1] enunciou um lema que permite obter a equação que descreve o movi-

mento sobre a superfície de descontinuidade. Esse movimento chama-se escorregamento, ou regime de escorregamento, e a condição necessária e suficiente para que  $S$  seja uma superfície de escorregamento, é que na sua vizinhança seja satisfeita a condição  $\dot{s} < 0$ .

LEMA 2.1 - Seja o sistema (2.1) satisfazendo às hipóteses do teorema (2.1). Suponha que  $f$  é limitada, e seja  $x$  absolutamente contínua. Para  $t_1 \leq t \leq t_2$ , suponha que  $x(t) \in S$ . Para que  $x(t)$  seja uma solução da equação (2.1), é necessário e suficiente que para quase todo  $t \in [t_1, t_2]$ ,

$$\frac{dx(t)}{dt} = f^0(x(t), t)$$

onde

$$f^0 : S \times (t_1, t_2) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x, t \mapsto f^0(x, t) = \alpha f^+(x, t) + (1-\alpha) f^-(x, t)$$

sendo

$$\alpha = \frac{f_N^-(x, t)}{f_N^-(x, t) - f_N^+(x, t)}, \quad \alpha \in [0, 1]$$

Então, quando a trajetória atinge a superfície  $S$ , ou para condições iniciais tomadas sobre a superfície  $S$ , a solução da equação (2.1) coincide com a solução da equação:

$$\frac{dx}{dt} = f^0(x, t) \tag{2.13}$$

Se  $\alpha=1$  ou  $\alpha=0$ , o movimento é chamado regime de escorregamento limite, e  $f^0$  será igual a  $f^+$  ou  $f^-$ , respecti

vamente.

Suponha-se que  $f$  dependa de um parâmetro  $a$ , isto é, que seu valor seja dado por  $f(x(t), t, a)$ . Ora, se  $f^0$  não depender de  $a$ , quando a solução de (2.1) atingir a superfície  $S$ , o sistema tornar-se-á invariante em relação ao parâmetro  $a$ . Para isso é necessário que  $\alpha \neq 1$  e  $\alpha \neq 0$ , ou seja, que  $f^0$  não seja igual a  $f^+$  nem a  $f^-$ .

Essa propriedade é muito interessante, e pode ser aproveitada em sistemas de controle em malha fechada. Basta se introduzir um controle  $u$  descontínuo, de maneira a levar o sistema ao escorregamento numa superfície escolhida a priori.

Para fixar as idéias, considere-se o sistema:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + Dp$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots\dots\dots 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots\dots 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots 0 \\ 0 & 0 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots 0 \\ -a_0 & -a_1 & \dots\dots\dots\dots\dots -a_{n-1} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$p(t) \rightarrow \text{perturbações (referidas à entrada)}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

É possível escolher  $u=u(x(t))$  descontínuo, de forma que o sistema entre em regime de escorregamento (mais adiante



será visto como isso pode ser feito) sobre o hiperplano definido por:

$$s(x(t)) = \sum_{i=1}^n c_i x_i = 0, \quad c_n = 1$$

Uma vez em escorregamento, o sistema passa a ser regido pela equação de ordem  $n-1$  :

$$\sum_{i=1}^n c_i x_i = 0$$

Pela forma da matriz  $A$  , vê-se que  $\dot{x}_i = x_{i+1}$  ,  $i=1, \dots, n-1$  e pode-se obter a equação do escorregamento :

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ -c_1 & -c_2 & \dots & \dots & -c_{n-1} \end{bmatrix} x(t), \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix}$$

Em regime de escorregamento, o movimento se processa num subespaço de dimensão  $n-1$  , e a equação do escorregamento não depende dos parâmetros  $a_i$  do sistema controlado; depende dos parâmetros  $c_i$  do hiperplano de comutação, os quais se pode escolher a priori. Também, no escorregamento, o sistema controlado tornar-se-á insensível às perturbações.

Logo, as perturbações externas e as variações de parâmetros interferem no movimento apenas antes da trajetória encontrar o hiperplano de escorregamento, e determinam pois as condições iniciais da equação do escorregamento.

Se a parte do transitório antes do escorregamento é bem menor que durante o escorregamento, ter-se-á então um sistema de baixa sensibilidade.

## 2.7 - Problema de Controle Ótimo

Será apresentado agora um problema de controle ótimo que não admite solução ótima no sentido de Filippov. O exemplo serve para mostrar que, mesmo que o problema não admita solução de Filippov ótima, é interessante aplicar estratégias que admitam soluções de Filippov. Com elas se pode obter soluções sub-ótimas, de implementação prática bem mais fácil, e com vantagens adicionais, como por exemplo, invariância.

Considere-se o sistema:

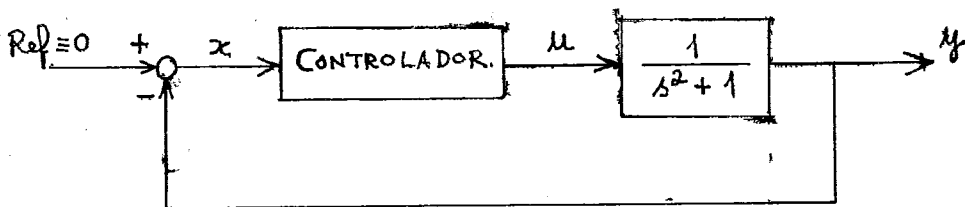


Figura 2.8

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - u \end{cases}$$

$$u(t) \in \mathbb{R}$$

$$|x_1^2(0) + x_2^2(0)| \leq 4$$

$$J = \int_0^{t_f} u^2(x_2 + x_1^3) dt \quad t_f \geq 0$$

O problema é escolher  $u(t)$  de maneira a levar o sistema de uma condição inicial dada até a origem, minimizando o

funcional objetivo  $J$  .

### Estratégia 1

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x_2 + x_1^3 \neq 0 \\ (3x_1x_2 - 1)x_1 & \text{se } x_2 + x_1^3 = 0 \end{cases}$$

Então, dada uma condição inicial qualquer fora da parábola cúbica  $x_2 + x_1^3 = 0$  , o ponto se desloca sobre um arco de circunferência ( $u=0$ ) até encontrar a parábola cúbica. Nessa parte do trajeto o custo é nulo, pois  $u=0$  . Em seguida, com  $u=(3x_1x_2-1)x_1$ , o ponto segue a parábola cúbica até a origem. Também nesse trajeto o custo é nulo, pois  $x_2 + x_1^3 = 0$  .

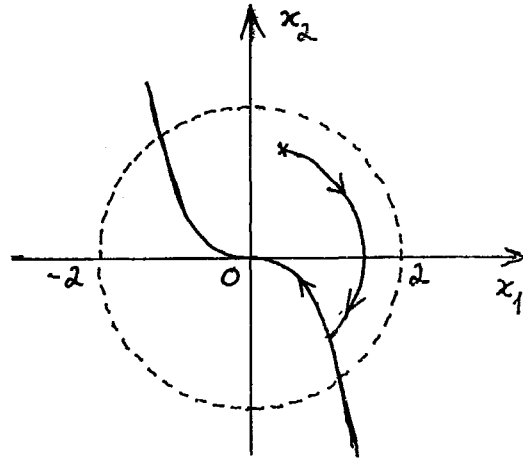
Nesse caso,  $K\{f(x(t))\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix} \right\}$  pois  $u(x)=(3x_1-1)x_1$  apenas num conjunto de medida nula  $P=\{x(t) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 + x_1^3 = 0\}$ , e a solução de Filippov correspondente não alcançará a origem.

Pela forma do funcional objetivo, vê-se que para qualquer função  $u$  tal que a solução de Filippov alcance a origem, ter-se-á um custo positivo. Então , nesse caso, não existe controle ótimo em malha fechada para soluções no sentido de Filippov \* .

---

\* Buyakas [15] determinou as condições de existência do controle ótimo em malha fechada (para soluções de Filippov) para funcionais objetivo da forma:  $J = \int_0^\infty \langle x, Qx \rangle dt$ ,  $Q$  definida positiva.

Figura 2.9



Como, em malha fechada, o sinal de controle é determinado por uma medida do estado, a implementação prática da estratégia seria impossível. Já foi chamada a atenção para esse fato no primeiro exemplo de controle ótimo, usado para caracterizar soluções no sentido de Filippov.

Considere-se agora a elaboração de outra estratégia, admitindo soluções de Filippov, que levará a um controle sub-ótimo em malha fechada, porém, de implementação mais fácil, e com vantagens adicionais (invariância), em relação à estratégia 1. Na nova estratégia, as leis de comutação serão determinadas a partir de relações de desigualdade, tendo, portanto, mais sentido físico.

### Estratégia 2

$$c \in \mathbb{R}, \quad c > 0$$

Seja

$$s(x) = x_2 + cx_1$$

$$p(x) = x_2 + x_1^3$$

e

$$S = \{x(t) \in \mathbb{R}^2 \mid s(x) = 0\}$$

$$P = \{x(t) \in \mathbb{R}^2 \mid p(x) = 0\}$$

A idéia é forçar o sistema a escorregar sobre a parábola cúbica  $P$ . A lei de controle será, pois :

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \begin{cases} s(x(t)) > 0 \\ p(x(t)) > 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} s(x(t)) < 0 \\ p(x(t)) < 0 \end{cases} \\ -Kx_1 & \text{se } \begin{cases} s(x(t)) > 0 \\ p(x(t)) < 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} s(x(t)) < 0 \\ p(x(t)) > 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$K \in \mathbb{R} \quad , \quad K > 1$$

Quando  $u = -Kx_1$ , tem-se:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + Kx_1 \end{cases}$$

$$\ddot{x}_1 - (K-1)x_1 = 0$$

As trajetórias serão hipérboles cujas assíntotas são:

$$x_2 = \sqrt{K-1} x_1$$

$$x_2 = -\sqrt{K-1} x_1$$

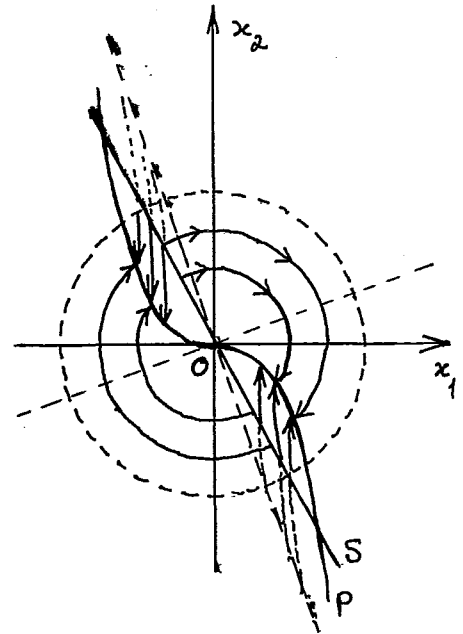
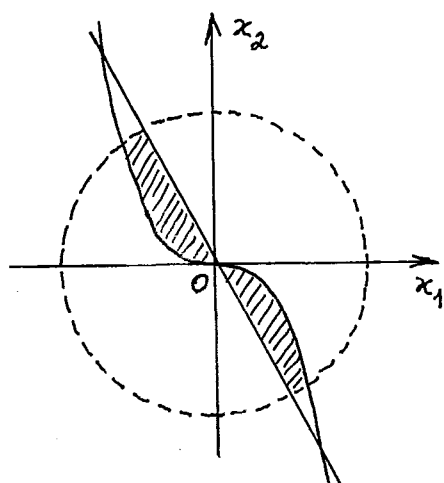


Figura 2.10

É preciso escolher  $\sqrt{K-1} > c$ , e  $c$  deve ser escolhido de tal maneira que a reta  $S$  intercepte a parábola cúbica  $P$  num ponto fora do círculo  $x_2^2 + x_1^2 = 4$ . Assim, ter-se-á um regime de escorregamento (solução de Filippov) garantido sobre a parábola  $P$ , mesmo que  $K$  e  $c$  e os parâmetros do sistema contro-

lado, variem numa certa faixa. Note que, sabendo a priori a faixa de variação dos parâmetros, se pode escolher convenientemente  $K$  e  $c$ . Depois, mesmo que  $K$  e  $c$  variem (envelhecimento, etc, faixa também conhecida a priori), ter-se-á garantia do escorregamento.

A vantagem aqui é que tudo é determinado a partir de relações de desigualdade.



Só haverá custo positivo para condições iniciais situados na parte hachurada (excluindo os pontos de  $P$ ), isto é, quando  $u = Kx_1$ . Note-se que a parte restante é bem maior que a parte hachurada.

Figura 2.11

Ademais, quando o sistema entra em escorregamento, a equação do movimento se modifica; a trajetória passa a ser a parábola  $P$ , e o sistema torna-se então invariante. Do ponto de vista da engenharia, é portanto, vantajoso, quando admissível, o emprego de estratégias que admitam soluções de Filippov.

## 2.8 - Discussão sobre as Descontinuidades e o Regime de Escorregamento

No parágrafo (2.1) foi salientado que se o segundo membro da equação (2.1) for descontínuo, não há garantia quanto à existência de soluções dessa equação.

Um procedimento usado para contornar essa dificuldade é substituir as funções descontínuas por funções contínuas que variam bruscamente nas regiões de descontinuidade das primeiras. Por exemplo [3], uma função sinal é substituída por uma função saturação. Com esse procedimento garante-se, pois, a existência e a unicidade das soluções, e o estudo da estabilidade é feito levando-se em consideração os parâmetros que definem as variações bruscas. Consegue-se um domínio de raio  $\epsilon$ , sendo  $\epsilon$  função dos parâmetros, em torno do ponto de equilíbrio, no qual a solução é confinada.

Um outro enfoque (Alimov [17], [6]), é substituir as descontinuidades por curvas, ou seja, supõe-se que, nos pontos de descontinuidade, a função assume todos os valores (não é mais função) entre os dois limites, isto é, considera-se um mapeamento ponto conjunto. Com esse método, garante-se a existência mas não a unicidade das soluções da equação, e o estudo da estabilidade pode ser feito através de algumas extensões dos teoremas de estabilidade de Liapunov.

A definição da solução de Filippov não apenas resolve o problema teórico da existência e unicidade das soluções, mas também permite uma melhor interpretação dos fenômenos que ocorrem em sistemas físicos, como, por exemplo, nos sistemas de controle em malha fechada, com sinal de controle descontínuo, nos quais ocorre o escorregamento. O teorema de existência é bem geral (Apêndice I), o que possibilita abordar uma grande classe de problemas. O teorema de unicidade (2.1) abrange os casos em que  $f_N^-(x,t) > 0$  e  $f_N^+(x,t) > 0$ ,  $f_N^-(x,t) > 0$  e  $f_N^+(x,t) < 0$ ,

$f_N^- < 0$  e  $f_N^+ < 0$ . Entretanto, no problema apresentado no parágrafo (2.7), foi usada uma estratégia tal que, para pontos sobre  $S$ , ocorre o caso  $f_N^-(x,t) < 0$  e  $f_N^+(x,t) > 0$ . Nesse caso, é fácil demonstrar que, para pontos numa certa vizinhança de  $S$ , a desigualdade  $s\dot{s} > 0$  é verificada, e a superfície  $S$  será repulsiva. Cabe então aqui a seguinte conjectura: para condições iniciais sobre  $S$ , o estado evoluirá para um dos lados de  $S$ , isto é, para  $G^-$  ou para  $G^+$ .

Essa conjectura é de natureza prática, pois matematicamente não há unicidade. Para ver-se isso, basta tomar-se um ponto na vizinhança de  $S$ , e seguir a semi-trajetória quando  $t \rightarrow -\infty$ . Aí haverá unicidade unilateral (direta), pois ter-se-á uma condição equivalente à  $f_N^-(x,t) > 0$  e  $f_N^+(x,t) < 0$ . Na volta, que é o caso da conjectura, não haverá unicidade. No entanto, fisicamente, é impossível tomar-se condições iniciais exatamente sobre a superfície  $S$ . Seria necessário uma precisão infinita, e ausência de perturbações.

Em [4], [5] e [6] são apresentadas diversas situações que podem aparecer, quanto às descontinuidades, e quanto ao comportamento das trajetórias na vizinhança da superfície de descontinuidade. O teorema de unicidade (2.1) abrange alguns casos, e permite, através do lema (2.1), definir a equação do regime de escorregamento. Entretanto, para o caso de superfícies de descontinuidade que se interceptam, nem sempre é possível definir a função  $f^0$  univocamente, nos pontos de interseção [6].

Uma outra maneira de se considerar o escorregamento,



é supor que existe sempre um retardo de comutação, que é o que ocorre na prática. Então, as condições  $f_N^-(x,t) > 0$  e  $f_N^+(x,t) < 0$  jamais são satisfeitas simultaneamente, pois as comutações nunca se dão sobre a superfície  $S$ . A figura (2.12) ilustra o fenômeno.

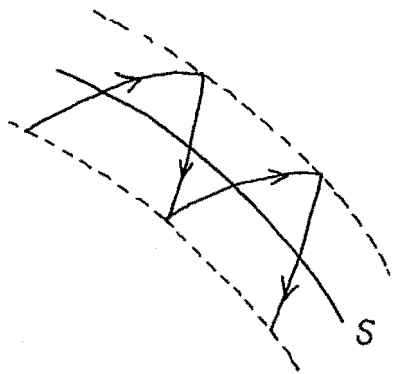


Figura 2.12

O que há é uma oscilação de frequência elevada e pequena amplitude, em torno da superfície de comutação. Quanto menor for o retardo de comutação, maior será a frequência, e menor será a amplitude. No limite, quando o retardo for nulo, a oscilação será de frequência infinita e amplitude nula, e o movimento dar-se-á sobre a superfície  $S$ .

O fato de se considerar um órgão de comutação ideal, leva, como já foi observado por Flugge-Lotz [17], a "estranhas consequências matemáticas", ligadas ao problema da existência de soluções da equação diferencial. A teoria de Filippov representa, pois, uma contribuição nesse sentido.

O movimento representado na figura (2.12) é chamado escorregamento não ideal, e é o que ocorre na prática, nos sistemas de controle a estrutura variável. Para que a oscilação não tenha efeitos indesejáveis (imprecisão, ciclos limite, etc) no funcionamento do sistema, é necessário que seu período seja bem menor que a constante de tempo do sistema controlado, isto é, é pre

ciso que o sistema controlado seja um filtro passa-baixa.

Por outro lado, devido às imperfeições do regime de escorregamento, a invariância que se obtem não é absoluta, mas é tão próxima da absoluta quanto melhor for o escorregamento não ideal.

A única maneira geral de se estudar o escorregamento não ideal, levando-se em consideração as imperfeições dos órgãos de comutação (histerese, retardo, zona morta), é através do método do primeiro harmônico. Em [13] é apresentada uma síntese desse estudo. No caso de sistemas de segunda ordem, é possível fazer um estudo rigoroso do escorregamento não ideal, pelo método do plano de fase.

### CAPÍTULO 3

#### SISTEMAS DE CONTROLE A ESTRUTURA VARIÁVEL

Serão apresentadas agora as principais leis de controle que se pode usar nos chamados sistemas de controle a estrutura variável, bem como as vantagens da aplicação desses sistemas.

A idéia básica é fazer variar os parâmetros da equação, com o intuito de estabilizar o sistema por ela regido.

Vários caminhos (Ver capítulo anterior) levam a impor uma variação descontínua nos parâmetros.

Uma vantagem adicional desses sistemas de controle é que, forçando-os a entrar em escorregamento numa superfície, definida, a priori, por uma equação que não depende dos parâmetros do sistema controlado, este tornar-se-á, sob certas condições, invariante.

#### 3.1 - Definição de Sistemas de Controle a Estrutura Variável

Os sistemas de controle a estrutura variável são sistemas de controle em malha fechada, nos quais a estrutura e/ou os parâmetros do controlador variam, sendo descontínuas as variações de parâmetros, de acordo com uma lei de controle, em função do estado do sistema, e/ou das perturbações agindo no sistema controlado.

O diagrama apresentado na figura 3.1 mostra uma pos-

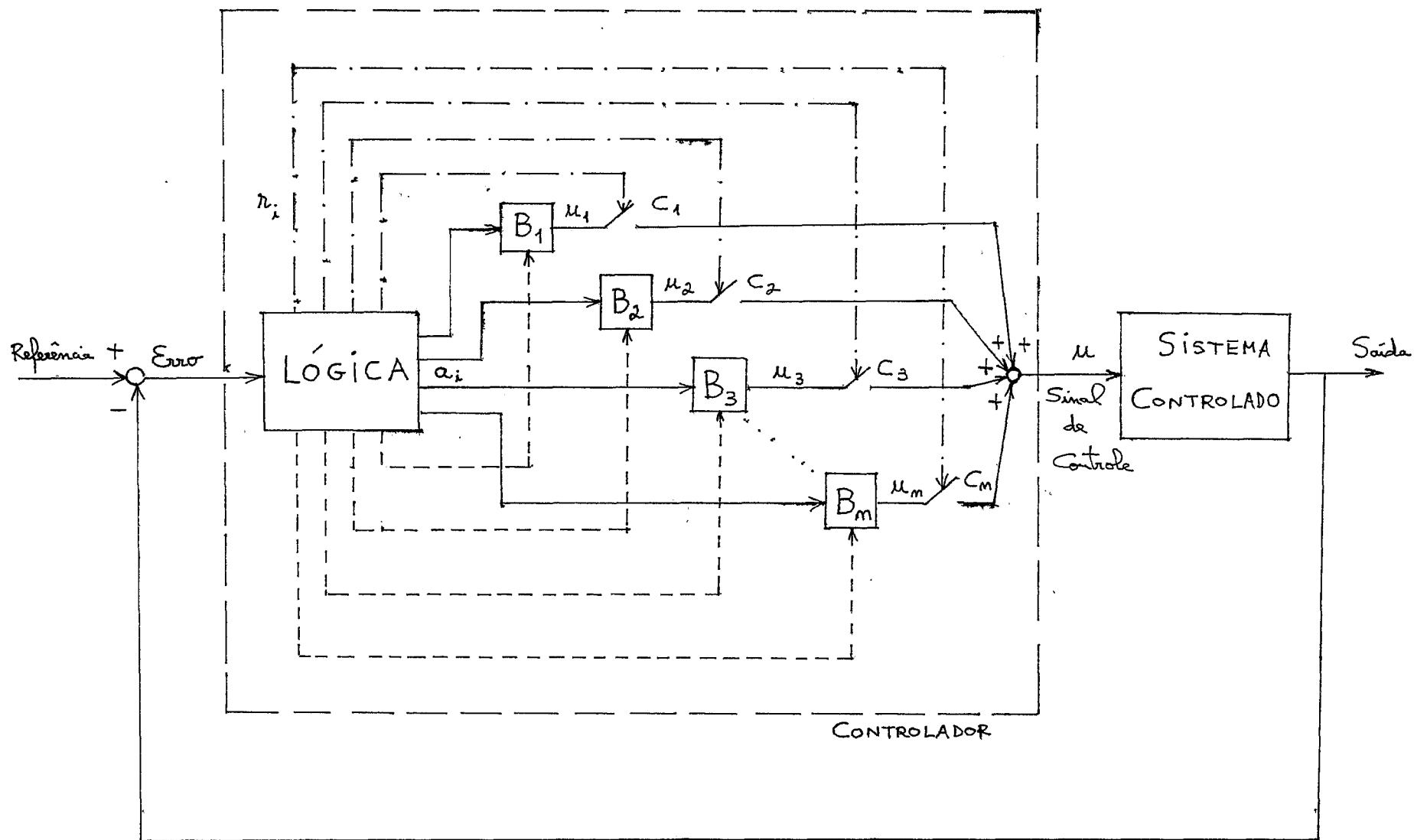


Figura 3.1

sível configuração de um sistema de controle a estrutura variável.

O bloco de lógica observa o estado do sistema, e, a partir dessa informação, executa a lei de controle nele implementada pelo projetista. Esse bloco exerce três funções de controle:

1) Elabora o sinal  $r_i$ , do tipo digital, que comanda a chave  $C_i$ , ou seja, faz variar a estrutura do controlador.

2) Elabora o sinal  $a_i$ , do tipo analógico, função contínua do estado e/ou das perturbações.

3) Determina qual, entre os  $v_i$  valores, deve tomar cada parâmetro  $b_i$ , de cada bloco  $B_i$ .

De uma maneira geral, os blocos  $B_i$ , e o sistema controlado, podem ser não lineares.

É razoável se pensar em associar uma variação de estrutura a uma variação descontínua de parâmetros, e vice-versa.

Considere-se, por exemplo, os blocos  $B_1$  e  $B_2$  da figura 3.2, sendo  $a_1 = a_2 = a$ , e  $K_1$  e  $K_2$  dois ganhos fixos.

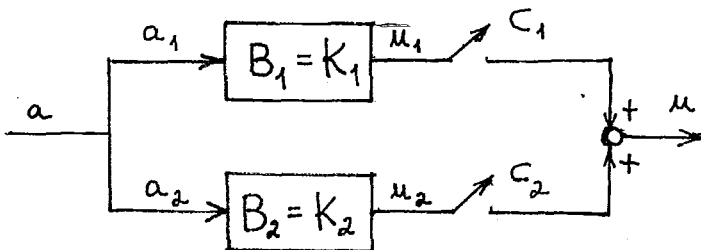


Figura 3.2

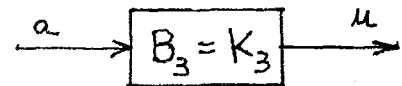


Figura 3.3

Esse diagrama é equivalente ao da figura 3.3, que possui apenas o bloco  $B_3$ , onde o ganho  $K_3$  pode tomar quatro valores,

dependendo do estado das chaves  $C_1$  e  $C_2$ , conforme a tabela abaixo :

$C_1$	$C_2$	$K_3$
0	0	0
0	1	$K_2$
1	0	$K_1$
1	1	$K_1 + K_2$

Matematicamente, tudo pode ser considerado como variações descontínuas dos parâmetros, embora seja possível implementar fisicamente essas variações através de mudanças de estrutura.

A definição parece superabundante, mas a idéia é realizar as variações descontínuas dos parâmetros, sintetizadas matematicamente, através de mudanças físicas de estrutura, e, por outro lado, interpretar matematicamente as mudanças físicas de estrutura, como variações descontínuas dos parâmetros.

Na prática, o problema é como utilizar os dispositivos físicos existentes, sejam a parâmetros fixos, sejam a parâmetros comutáveis, num certo número de estruturas, a variação de uma estrutura a outra sendo feita através de trocas nas ligações entre os mesmos dispositivos. Ou então, a criação de novos dispositivos que, por sua vez, permitirão uma maior flexibilidade na elaboração de leis mais complexas.

Pelo exposto, depreende-se facilmente que os sistemas de controle a estrutura variável são sistemas de controle auto-adaptativos (Ver Mira e Abatut [18]) . Neles, não apenas os parâmetros podem variar, mas pode variar também a própria estrutura do controlador, isto é, a lei de controle, em função do estado e/ou das perturbações do sistema controlado. Eles podem ser classificados, pois, como sistemas a auto-organização [19].

### 3.2 - Controle de um Sistema de Segunda Ordem

Agora será feita uma análise do problema do controle de um sistema linear de segunda ordem, através de um controlador a estrutura variável.

Essa análise, comparativa, permitirá uma melhor compreensão do funcionamento dos sistemas de controle a estrutura variável, bem como uma melhor apreciação das vantagens inerentes a esse tipo de controle. No momento, será analisado um regulador, mas, conforme explicado adiante, a técnica aplica-se no caso geral.

Considere-se o sistema:

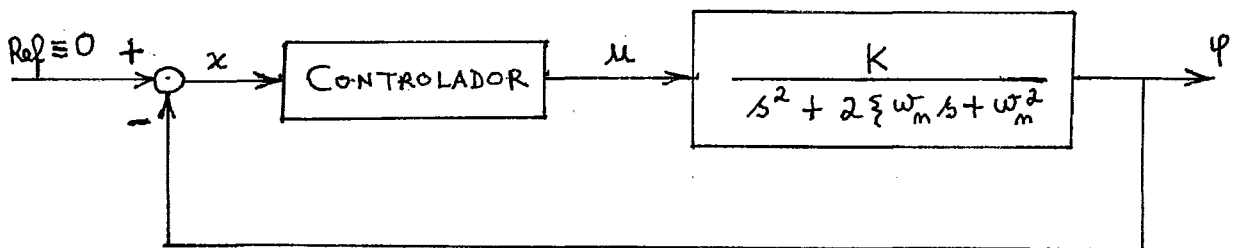


Figura 3.4

A equação

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = -Ku \quad (3.1)$$

onde  $x(t)$  é o erro, descreve o comportamento do sistema.

O problema é determinar  $u(x)$  de maneira que o sistema satisfaça às especificações.

Supondo que não é exigida uma grande precisão, não há necessidade de se usar controle integral.

Pode-se então usar o controle proporcional, isto é, fazer:

$$u = K_a x \quad (3.2)$$

A escolha do ganho  $K_a$  deve ser feita de maneira que o sistema atenda às especificações exigidas. Entretanto, as especificações podem ser, às vezes, contraditórias. Por exemplo, aumentando-se  $K_a$ , diminui o tempo de resposta, mas aumenta o sobre-passo do sistema. Por outro lado, o ganho  $K_a$  deve ter um valor mínimo, de forma a satisfazer à especificação do erro de regime permanente. Portanto, o que se pode obter, é uma solução de compromisso. (Compromisso estabilidade-precisão, para os sistemas de controle de maneira geral).

Caso haja um pouco mais de exigência no que diz respeito à precisão, é possível aumentar o ganho  $K_a$ , introduzindo-se uma correção taquimétrica (Figura 3.5), a fim de não prejudicar o comportamento dinâmico do sistema.

(Figura 3.5 na próxima página)



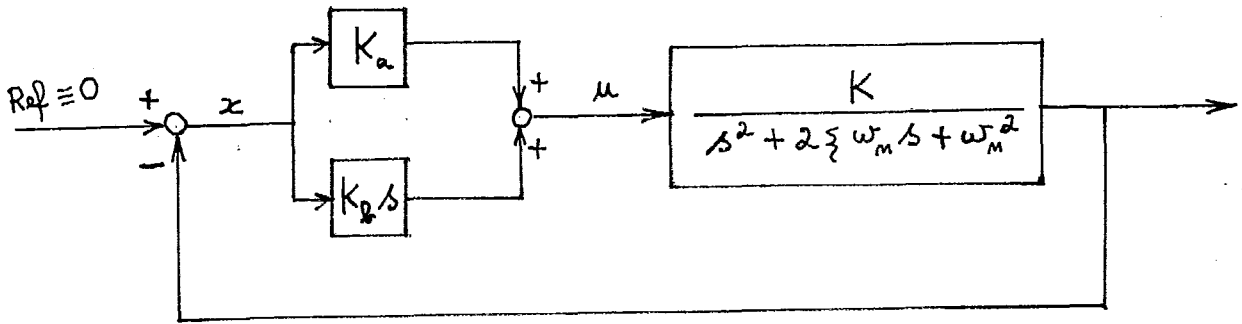


Figura 3.5

Nesse caso:

$$u = K_a x + K_b \dot{x} \quad (3.3)$$

A escolha do ganho  $K_b$  da realimentação taquimétrica é feita normalmente de maneira a otimizar um funcional objetivo, como, por exemplo:

$$J_1 = \int_0^{\infty} x^2(t) dt \quad (3.3.a)$$

Segundo esse critério, o amortecimento resultante se rá igual a 0,5, e  $K_b$  terá por valor:

$$K_b = \frac{\sqrt{\omega_n^2 + K K_a} - 2\xi\omega_n}{K} \quad (3.4)$$

Mas esse critério não é muito seletivo (Ver Dorf[20], pag. 101) e nesse caso é melhor usar o funcional :

$$J_2 = \int_0^{\infty} t |x(t)| dt \quad (3.5)$$

Partindo de (3.5), o amortecimento total resultante

será igual a 0,7 , e  $K_b$  terá por valor :

$$K_b = \frac{1,4 \sqrt{w_n^2 + K K_a} - 2\xi w_n}{K} \quad (3.6)$$

Devido à pouca seletividade do critério  $J_1$  , o fato de se tomar o valor de  $K_b$  definido por (3.6) pouco alterará o valor de  $J_1$  min (menos de 10%) .

A estratégia (3.3) oferece melhores possibilidades que a estratégia (3.2). Com ela é possível aumentar-se  $K_a$ , e o controle do sobrepasso fica sendo feito através de  $K_b$  . Inclusive, há a possibilidade de se ajustar  $K_b$  de modo a sobre amortecer o sistema, isto é, anular o sobrepasso. Nesse caso, o custo será maior, pois a resposta se torna bastante lenta.

Qualquer que seja o ajuste de  $K_b$  , resta ainda um problema: o regime transitório será sempre lento. A introdução do amortecimento implica numa resposta mais lenta. A solução é, portanto, um compromisso entre amortecimento e rapidez de resposta.

É possível resolver esse problema, isto é, quebrar esse compromisso, acrescentando-se um relé com zona morta, para comutação de estrutura, ou seja, projetando-se um controlador a estrutura variável.

Esse relé é ligado no bloco de correção taquimétrica (Figura 3.6), e o objetivo é introduzir o amortecimento apenas quando este é necessário.

A lei de controle é a seguinte:

quando  $|x| > \epsilon$  , o relé deve estar aberto ;

quando  $|x| < \epsilon$  , o relé deve estar fechado.

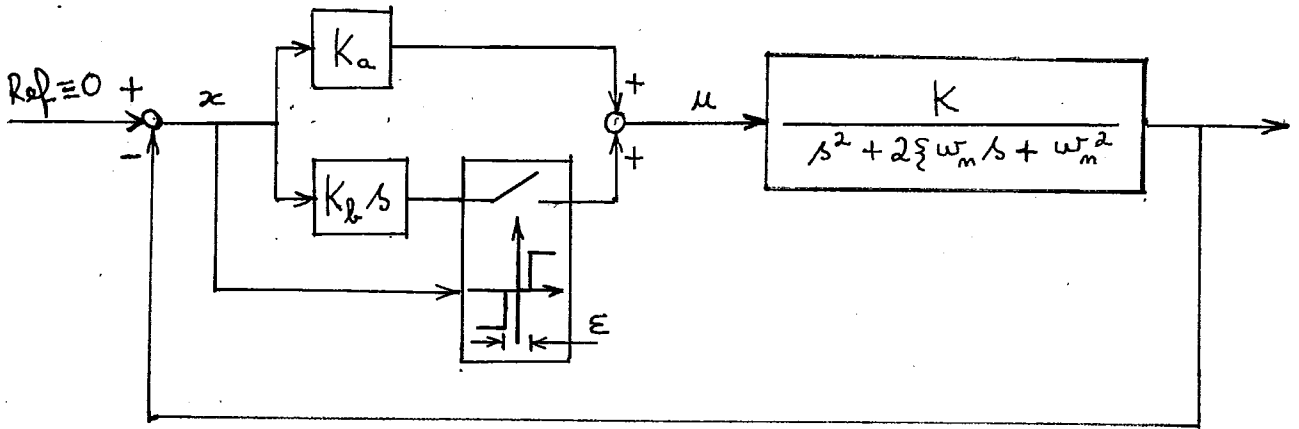


Figura 3.6

Nessa estratégia também é possível aumentar  $K_a$  à vontade.

Com efeito, suponha-se dada uma condição inicial tal que  $|x| > \epsilon$ . O sistema responde rapidamente, pois  $K_a$  é bastante elevado, e, se não houvesse nenhuma variação de estrutura, teria um grande sobrepasso, e a resposta seria oscilatória, fracamente amortecida. Entretanto, quando  $|x| < \epsilon$ , o relé comuta, e entra em jogo a correção taquimétrica, impedindo a ocorrência do sobrepasso, amortecendo fortemente o sistema a partir daquele ponto. Para isso,  $K_b$  deve ser ajustado de modo a sobreamortecer o sistema.

Com essa estratégia, de implementação simples, obtém-se, pois, um sistema rápido, amortecido, e preciso.

A Figura 3.7 mostra as respostas a um degrau  $\ell(t) = \ell_0$ , dos três sistemas de controle apresentados. Abaixo de cada resposta está a integração gráfica (área hachurada) de  $x^2(t)$ , que corresponde ao critério  $J_1$  (3.3.a). Por essa figura se pode visuali-

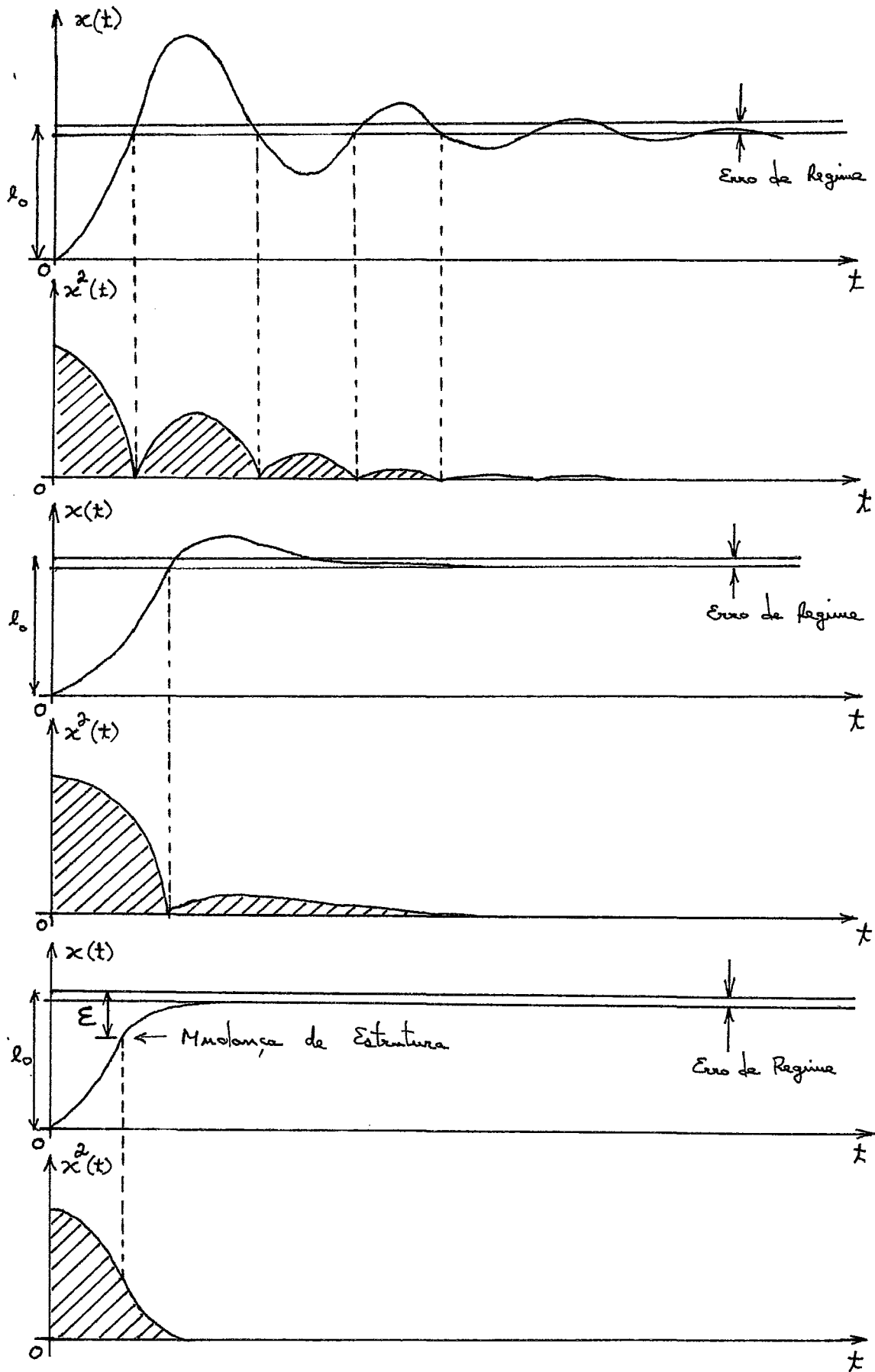


Figura 3.7

zar bem o desempenho de cada sistema, e, em particular, a grande melhoria obtida com o controlador a estrutura variável. Este reúne apenas as vantagens dos outros dois.

Essa estratégia a estrutura variável tem o mesmo efeito que o de uma rede compensadora do tipo avanço de fase.

Uma outra alternativa de troca de estrutura seria, por exemplo, inverter, no momento oportuno, o sentido da correção táquimétrica. A configuração do controlador seria, então, conforme o diagrama da Figura 3.6 a .

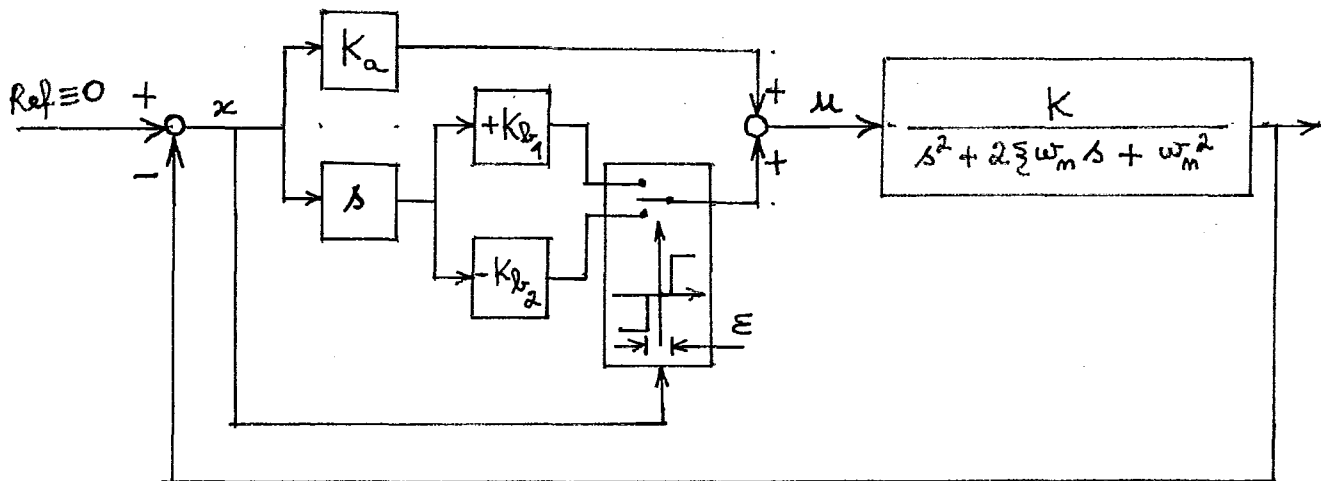


Figura 3.6 a

A lei de controle seria similar à do caso anterior. Entretanto, agora, quando  $|x| > \epsilon$ , em vez de não se introduzir amortecimento, introduz-se um amortecimento negativo no sistema. Consequentemente, o sistema será mais rápido ainda, com essa estratégia, em relação à estratégia anterior. Inclusive, dependendo do valor de  $K_{b2}$ , o amortecimento total do sistema poderá ser negativo, pa-

ra  $|x| > \epsilon$  . Para isso, é suficiente que :

$$2\xi w_n - K K_{b_2} < 0$$

ou seja, que

$$K_{b_2} > \frac{2\xi w_n}{K}$$

Tal comportamento seria impossível de se obter com um controlador linear fixo, mantendo-se o sistema estável.

Usando-se o segundo método de Liapunov (2. ) para projetar o controlador, chega-se também a uma estratégia que utiliza estrutura variável.

Representando a equação (3.1) na forma normal,  $\dot{x}=f(x)$ , vem:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -w_n^2 x_1 - 2\xi w_n x_2 - Ku \end{cases} \quad (3.7)$$

Fazendo  $u = \psi x_1$  , vem :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -(w_n^2 + K\psi)x_1 - 2\xi w_n x_2 \end{cases}$$

Seja a função de Liapunov  $V(x_1, x_2)$ . A escolha de  $\psi$  deverá ser feita de maneira a se obter a maior taxa de decrescimento de  $V$  , ao longo das trajetórias do sistema (3.7) .

A derivada de  $V$  em relação ao tempo é :

$$\dot{V}(x_1, x_2) = \frac{\partial V}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial V}{\partial x_2} (w_n^2 x_1 + 2\xi w_n x_2) - K\psi \frac{\partial V}{\partial x_2} \cdot x_1$$

Para que  $\dot{V}(x_1, x_2)$  seja a mais negativa possível, deve-se ter :

$$\psi = w \operatorname{sign} \frac{\partial V}{\partial x_2} x_1, \quad w > 0$$

Seja então :

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} B x_1^2 + A x_1 x_2 + \frac{1}{2} x_2^2, \quad B > 0, \quad A > 0, \quad B > A^2$$

Logo,

$$\psi = w \operatorname{sign} x_1 (x_2 + A x_1)$$

O argumento da função  $\operatorname{sign}$  define duas retas de comutação:

$$S_1 = \{x(t) \in \mathbb{R}^2 \mid s_1(x) = x_1 = 0\}$$

e

$$S_2 = \{x(t) \in \mathbb{R}^2 \mid s_2(x) = x_2 + A x_1 = 0\}$$

Essas retas dividem o plano de fase em quatro partes, a saber:

$$\begin{array}{llll} \text{I} \begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 + A x_1 > 0 \end{cases} & \text{II} \begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 + A x_1 < 0 \end{cases} & \text{III} \begin{cases} x_1 < 0 \\ x_2 + A x_1 > 0 \end{cases} & \text{IV} \begin{cases} x_1 < 0 \\ x_2 + A x_1 < 0 \end{cases} \end{array}$$

No eixo dos  $x_2$  (reta  $S_1$ ), excluindo a origem, os vetores  $f^-$  e  $f^+$  tem o mesmo sentido (Ver exemplo 1.1), de forma que as trajetórias cruzam o eixo dos  $x_2$  no sentido horário.

Determinar-se-ão agora as condições em  $w$  e  $A$  para

que a reta  $S_2$  seja uma reta de escorregamento.

Pelo teorema (2.2), vê-se que a condição necessária e suficiente para que  $S_2$  seja uma reta de escorregamento é que  $s_2 \dot{s}_2 < 0$  numa vizinhança de  $S_2$ .

Ora,

$$\dot{s}_2 = \dot{x}_2 + A\dot{x}_1$$

Substituindo-se  $\dot{x}_1$  e  $\dot{x}_2$  por seus valores dados em (3.7), vem:

$$\dot{s}_2(x) = -w_n^2 + Kw \sin \alpha x_1 (x_2 + Ax_1) x_1^{-2\xi w_n x_2} + Ax_2$$

Como  $f$  é contínua  $\forall x \notin S_1$  e  $\forall x \notin S_2$ , pode-se escrever  $s_2 \dot{s}_2 < 0$  para  $s_2(x) = 0$ , ou seja, se pode substituir  $x_2$  por  $-Ax_1$ , pois os limites existem.

Então,

$$\dot{s}_2(x) = - \left[ w_n^2 + Kw \sin \alpha x_1 s_2 \right] x_1 + 2\xi w_n A x_1 - A^2 x_1$$

$$\dot{s}_2(x) = - \left[ A^2 - 2\xi w_n A + w_n^2 + Kw \sin \alpha x_1 s_2 \right] x_1$$

Deve-se escolher  $w$  de maneira que  $s_2 \dot{s}_2 < 0$ .

Mas

$$s_2 \dot{s}_2 = - \left[ A^2 - 2\xi w_n A + Kw \sin \alpha x_1 s_2 \right] x_1 s_2$$

Tem-se então dois casos:

$$x_1 s_2 > 0 \quad A^2 - 2\xi w_n A + w_n^2 + Kw \sin \alpha x_1 s_2 > 0$$

$$x_1 s_2 < 0 \quad A^2 - 2\xi w_n A + w_n^2 + Kw \sin \alpha x_1 s_2 < 0$$

ou seja,



$$\begin{aligned}
 A^2 - 2\xi w_n A + w_n^2 + Kw &> 0 \\
 A^2 - 2\xi w_n A + w_n^2 - Kw &< 0
 \end{aligned}
 \tag{3.8}$$

ou ainda,

$$|A^2 - 2\xi w_n A + w_n^2| < Kw \tag{3.9}$$

Portanto, a condição (3.9) é necessária e suficiente para que exista escorregamento em  $S_2$ .

Escolhendo-se um valor suficientemente grande para  $w$ , é sempre possível satisfazer a condição de escorregamento.

Utilizando-se o plano de fase, é possível fazer uma análise do comportamento do sistema, nas regiões I, II, III e IV.

Tem-se :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = - \left[ w_n^2 + Kw \operatorname{sign} x_1 (x_2 + Ax_1) \right] x_1 - 2\xi w_n x_2 \end{cases}$$

Nas regiões I e IV, o sistema será regido por :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = - \left[ w_n^2 + Kw \right] x_1 - 2\xi w_n x_2 \end{cases} \tag{3.10 a}$$

Se  $w$  é suficientemente grande, os valores próprios do sistema serão complexos conjugados, e a origem será um ponto de equilíbrio do tipo foco. Se  $2\xi w_n > 0$ , ter-se-á um foco estável (Figura 3.8), e se  $2\xi w_n < 0$ , um foco instável.

Nas regiões II e III , o sistema será regido por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -w_n^2 - Kw \ x_1 - 2\xi w_n x_2 \end{cases} \quad (3.10 \ b)$$

Se  $w$  é suficientemente grande, os valores próprios do sistema serão reais e de sinais opostos. A origem será então um ponto de equilíbrio do tipo sela (Figura 3.9).

Os valores próprios são :

$$\lambda_1 = -\xi w_n + \sqrt{w_n^2(\xi^2 - 1) + Kw} \quad , \quad \lambda_2 = -\xi w_n - \sqrt{w_n^2(\xi^2 - 1) + Kw}$$

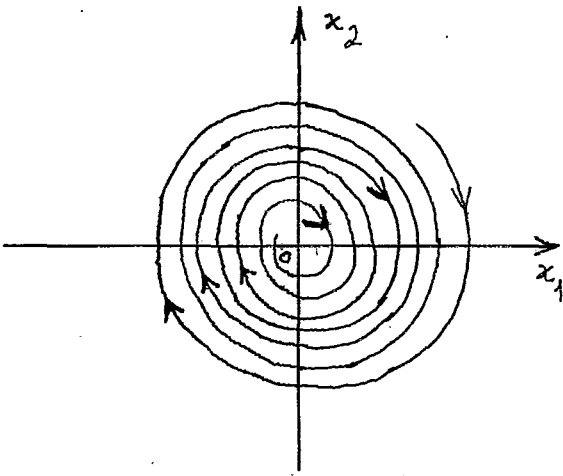


Figura 3.8

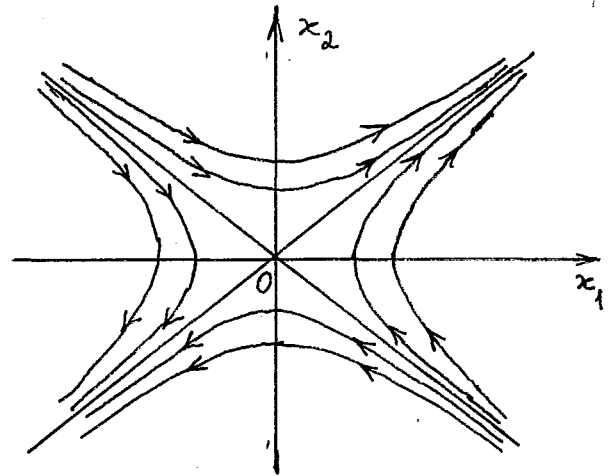


Figura 3.9

As retas  $x_2 = \lambda_1 x_1$  e  $x_2 = \lambda_2 x_1$  são assíntotas das hipérboles, trajetórias do sistema (3.10 b), cuja equação característica é :

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\xi w_n \lambda + w_n^2 - Kw = 0$$

Para  $\lambda \in (\lambda_2, \lambda_1)$ , tem-se  $p(\lambda) < 0$  . Supondo então

que:  $A > 0$  e  $\lambda = -A > \lambda_2$ , obtem-se  $p(-A) = A^2 - 2\xi w_n A + w_n^2 - Kw < 0$ .

Logo, a segunda das desigualdades (3.8) será satisfeita se o ângulo entre a reta  $S_2$  e o eixo dos  $x_1$  for maior que o ângulo entre a reta  $x_2 = \lambda_2 x_1$  e o eixo dos  $x_1$  (Ver Figura 3.10 ).

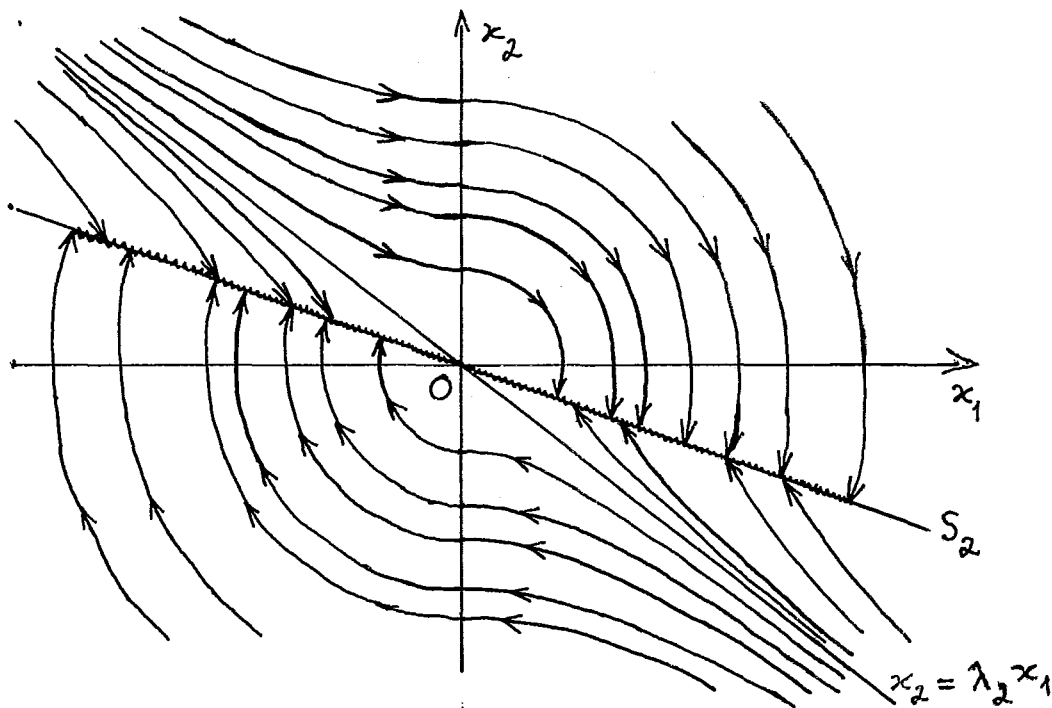


Figura 3.10

A primeira das desigualdades (3.8) pode sempre ser satisfeita escolhendo-se um valor suficientemente elevado para  $w$ , pois  $p$  é limitada inferiormente.

Satisfeitas as condições (3.8), pode-se então assegurar a existência do escorregamento em todos os pontos de  $S_2$ .

Pela Figura (3.10) é fácil ver que para qualquer condição inicial dada, o ponto representativo (que descreve a trajetória), alcançará a reta  $S_2$ . Depois, entrará em regime de escorre-

gamento em  $S_2$  e seguirá até a origem.

Através da lema 2.1 se pode determinar a equação do escorregamento.

Tem-se:

$$\dot{x} = f^0(x) \quad , \quad \text{onde} \quad f^0(x) = \alpha f^+(x) + (1-\alpha)f^-(x)$$

Ora,

$$f^+(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -(w_n^2 + Kw)x_1 - 2\xi w_n x_2 \end{bmatrix}$$

e

$$f^-(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -(w_n^2 - Kw)x_1 - 2\xi w_n x_2 \end{bmatrix}$$

Sabe-se que, para  $x(t) \in S_2$  :  $x_1 = -1 \Rightarrow x_2 = A$  .

Então,

$$f^0(-1, A) = \alpha \begin{bmatrix} A \\ w_n^2 + Kw - 2\xi w_n A \end{bmatrix} + (1-\alpha) \begin{bmatrix} A \\ w_n^2 - Kw - 2\xi w_n A \end{bmatrix}$$

$$f^0(-1, A) = \begin{bmatrix} A \\ w_n^2 - 2\xi w_n A + (2\alpha - 1)Kw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ -1 \end{bmatrix}$$

pois o vetor velocidade pertence à reta  $S_2$  .

Então,

$$w_n^2 - 2\xi w_n A + (2\alpha - 1)Kw = -1$$

Donde:

$$\alpha = \frac{1}{2} \left( \frac{2\xi w_n A - w_n^2 - 1}{Kw} + 1 \right)$$

Portanto,

$$f^0(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ - \left[ w_n^2 + (2\alpha - 1)Kw \right] x_1 - 2\xi w_n x_2 \end{bmatrix}$$

Mas,

$$(2\alpha - 1)Kw = -w_n^2 + 2\xi w_n A - 1$$

e, no escorregamento,  $x_2 = -Ax_1$

Logo:

$$f^0(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ - \left[ 2\xi w_n A - 1 \right] x_1 + 2\xi w_n x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Ax_1 \\ - \frac{x_2}{A} \end{bmatrix}$$

A equação do escorregamento será, pois:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -Ax_1 \\ x_2 = - \frac{x_1}{A} \end{cases} \quad (3.11)$$

ou

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -A & 0 \\ 0 & -\frac{1}{A} \end{bmatrix} x$$

De qualquer forma, a relação  $\dot{x}_1 = x_2$  é mantida e o "acoplamento" adicional entre as duas variáveis é feito através da reta de comutação  $S_2$ .

As duas equações (3.11) são equivalentes, sendo  $A$  a relação entre elas. Por conseguinte, no regime de escorregamento, o sistema evoluirá num subespaço de uma dimensão, segundo a equação :

$$\dot{x} + A x = 0 \quad (3.12)$$

a qual não depende dos parâmetros do sistema controlado, ou seja, de  $K$ ,  $\xi$  e  $w_n$ , e é estável, pois  $A > 0$ .

Suponha-se agora que os parâmetros do sistema variem, dentro de uma certa faixa, conhecida a priori, isto é :

$$K_{\min} < K < K_{\max}$$

$$\xi_{\min} < \xi < \xi_{\max}$$

$$w_{n_{\min}} < w_n < w_{n_{\max}}$$

Mesmo assim, é possível escolher  $w$  e  $A$  de forma que as condições de escorregamento sejam sempre satisfeitas.

Com efeito, basta se escolher  $w$  e  $A$  tais que :

$$w > \sup \left\{ \frac{2\xi w_n A - A^2 - w_n^2}{K} \right\} \quad (3.12)$$

$$-A > \sup \left\{ -\xi w_n - \sqrt{w_n^2(\xi^2 - 1) + Kw} \right\} = \sup \lambda_2 \quad .$$

Logo, as variações dos parâmetros interferirão no mo

vimento apenas antes do ponto representativo avançar a reta de escorregamento, e portanto terão influência apenas nas condições iniciais da equação do escorregamento.

É interessante se notar também que, mesmo que  $A$  e  $w$ , parâmetros do controlador, variem numa certa faixa, ainda é possível garantir o escorregamento. Basta que :

$$\inf w > \sup \left\{ \frac{2\xi w_n A - A^2 - w_n^2}{K} \right\} \quad (3.13)$$

e

$$\inf \{-A\} > \sup \left\{ -\xi w_n - \sqrt{w_n^2 (\xi^2 - 1) + Kw} \right\}$$

Deve-se pois, escolher  $w$  e  $A$ , de acordo com (3.12), com uma certa folga, de maneira que, mesmo que haja envelhecimento, as relações (3.13) sejam satisfeitas.

Existem várias maneiras de implementar praticamente essa estratégia. Note-se que não há necessidade de usar multiplicador para sintetizar fisicamente o sinal de controle :

$$u = wx_1 \text{ sinal } x_1(x_2 + Ax_1) \quad (3.14)$$

Como a operação de multiplicação está no argumento da função sinal, basta usar um comparador de sinal.

Entretanto, por uma transformação estrutural, pode-se representar o sistema conforme o diagrama da Figura 3.11. Essa representação permite uma melhor visualização, e também uma melhor interpretação do funcionamento do sistema.

De fato, pela Figura 3.11, vê-se que o sistema funciona como um sistema a relê, cuja amplitude é modulada pelo erro.

Assim, para valores iniciais longe da origem, a correção é grande, e o sistema funciona como um sistema a relê normal, sendo, portanto, rápido. Perto da origem, a correção diminui, e ele se comporta como um sistema linear; na origem não há grandes oscilações, como nos sistemas a relê. O sistema reúne pois as vantagens dos dois outros, e não possui as desvantagens de nenhum dos dois.

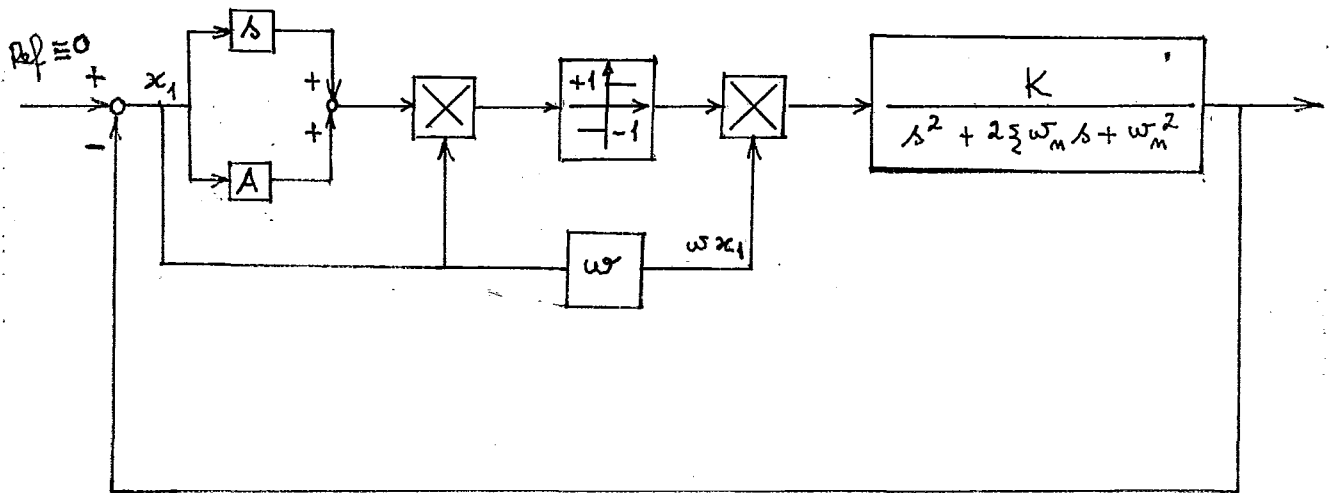


Figura 3.11

Quanto às oscilações na origem, cabe aqui a seguinte observação: é devido às imperfeições dos órgãos de comutação que aparecem oscilações na origem, isto é, ciclos limites. No caso dos sistemas de controle a estrutura variável, haverá uma perda de regime de escorregamento perto da origem, devida, por exemplo, à zo-



na morte do relé. Isto causará o aparecimento de um ciclo limite, que poderá, em certos casos, ser de maior amplitude que os ciclos limites observados num sistema a relé clássico, cuja amplitude (ganho)  $K_{ot}$  seja calculada de maneira a minimizar a amplitude do ciclo limite. Vernhes [12] fez uma análise desse fenômeno, para um caso particular de um sistema de segunda ordem, e sugeriu algumas leis de controle, para sistemas a estrutura variável, de maneira a contornar esse inconveniente. A idéia básica é não deixar que a amplitude do sinal de controle seja pequena demais, perto da origem.

Com essa estratégia (3.14), quanto mais se aumenta o ganho  $w$ , mais folga se terá na escolha de  $A$ , o que significa um aumento na rapidez do regime de escorregamento. Portanto, o aumento de  $w$  acelera o movimento antes do escorregamento, e, com o então possível aumento de  $A$ , acelera também o escorregamento. Resumindo, o aumento de  $w$  melhora a rapidez de resposta do sistema, sem trazer nenhum inconveniente.

Nas condições mais desfavoráveis, ter-se-á, no máximo, apenas um sobrepasso. Isso acontecerá para condições iniciais tais que :

$$x_1 < 0 \quad \text{e} \quad x_2 > \lambda_2 x_1$$

ou

$$x_1 > 0 \quad \text{e} \quad x_2 < \lambda_2 x_1$$

Também nesse caso, o aumento do ganho  $w$  traz benefício, pois, como se pode observar pelo plano de fase, quando maior for  $w$ , menor será o sobrepasso.

Na simulação analógica que se segue, é fácil observar o que ocorre:

Nas figuras (3.12) e (3.13) estão a trajetória e a resposta no tempo, respectivamente, do sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -1,3x_1 - 0,12 x_2 - 4 x_1 \sin \{x_1(x_2 + 0,3x_1)\} \end{cases}$$

Em seguida, o coeficiente 0,12 é substituído pelo coeficiente variável  $0,75 \sin \sqrt{10} t$ . Para esse caso, as figuras (3.14) e (3.15) mostram a trajetória e a resposta no tempo, respectivamente, considerando-se as mesmas condições iniciais  $(x_1(0) = 0, x_2(0) = 5,9)$ .

Pela simulação vê-se que, quando o sistema entra em regime de escorregamento, passa a não mais depender daquele parâmetro variável.

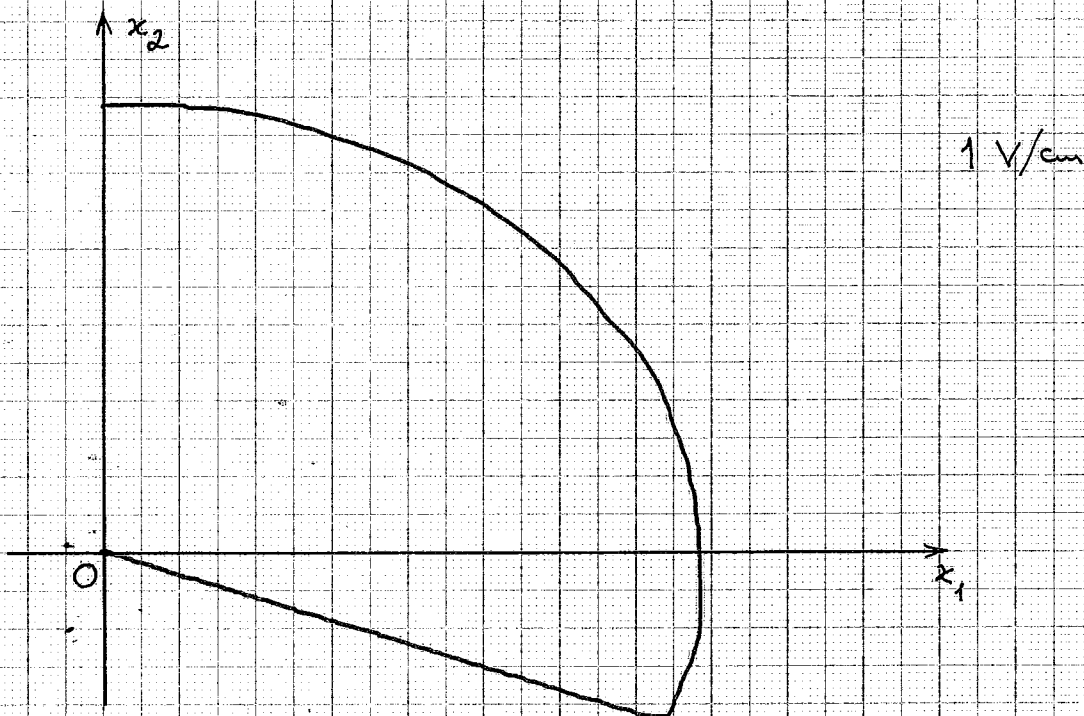


Figura 3.12

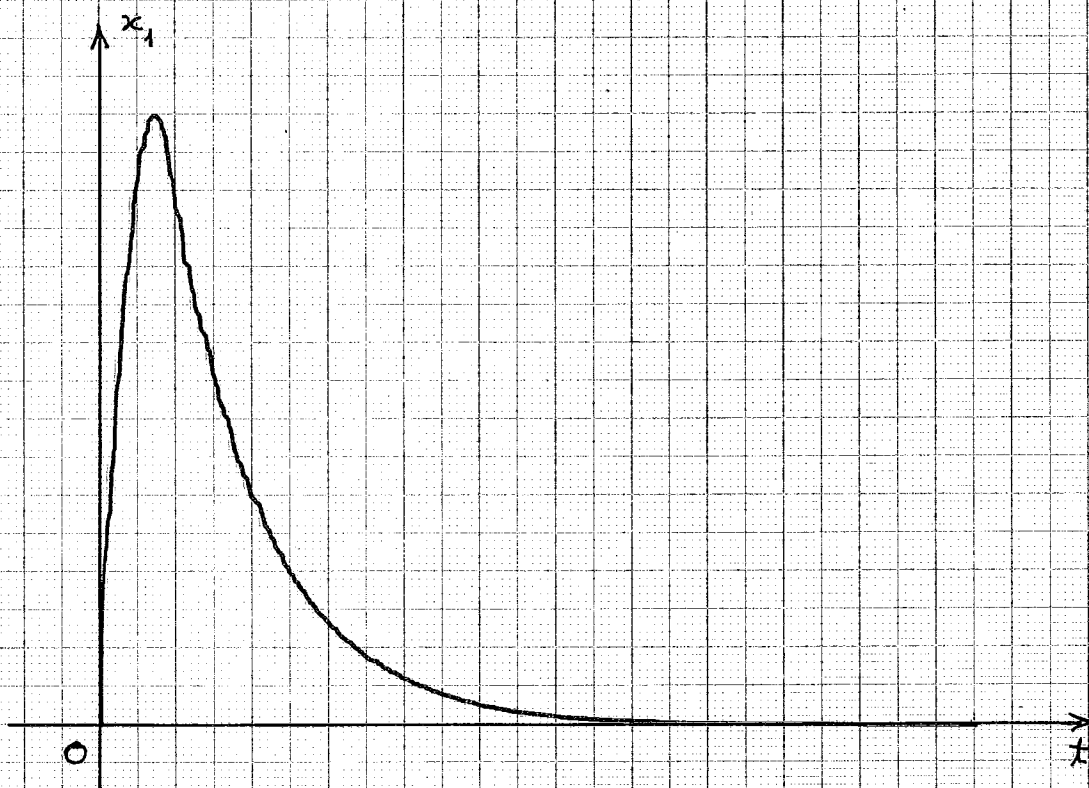


Figura 3.13

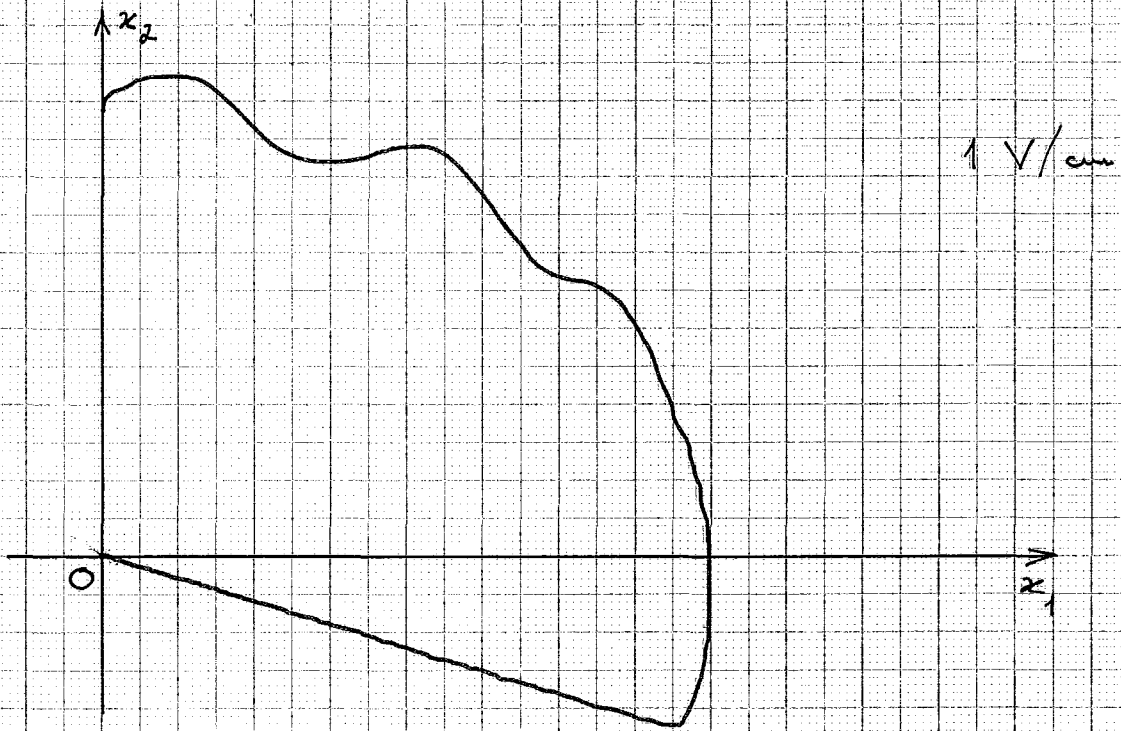


Figura 3.14

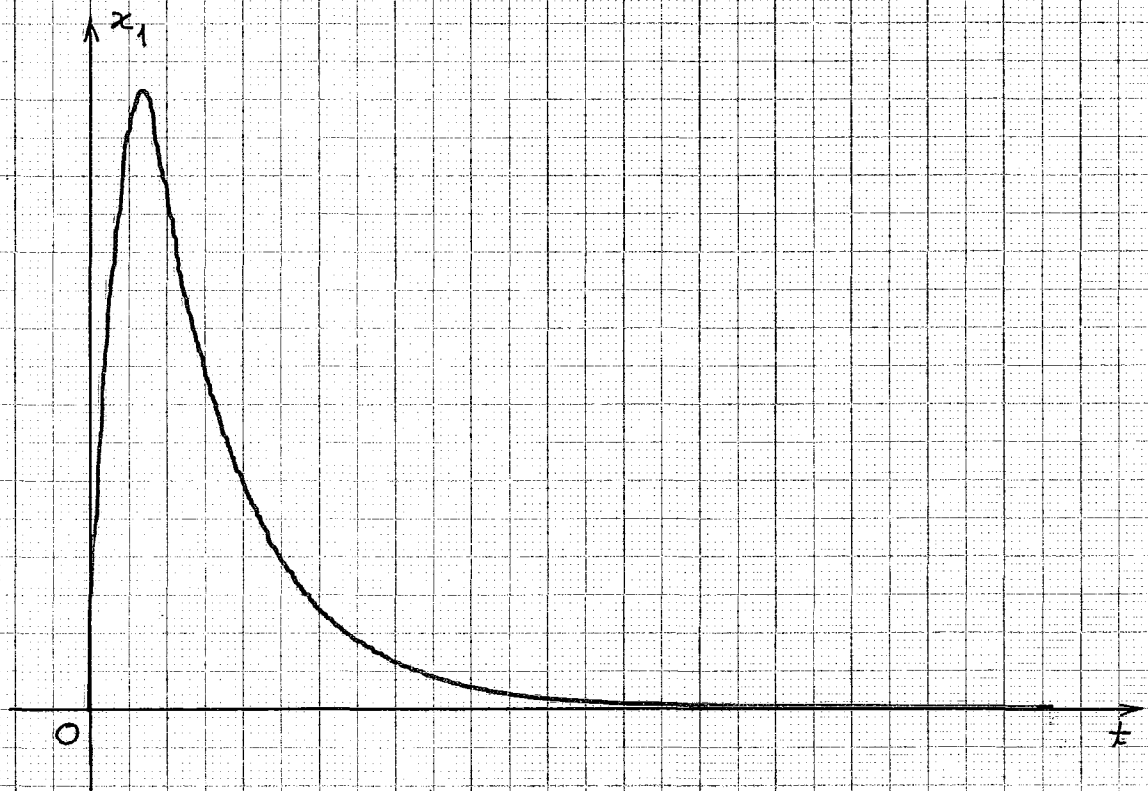


Figura 3.15

### 3.3 - Síntese de um controlador a estrutura variável para um sistema linear monodimensional, com parâmetros variáveis, e seu jeito a perturbações.

Neste parágrafo considera-se sistemas lineares monodimensionais cujas funções de transferência não contêm zeros. Refere-se ao artigo de Utkin [11], e mostra como elaborar uma lei de controle, levando em consideração as variações dos parâmetros e as perturbações, de maneira a tornar o sistema quase invariante. Isto é conseguido forçando-se o sistema a entrar em regime de escorregamento numa superfície, definida a priori no espaço de fase.

Considere-se pois o sistema esquematizado na Figura 3.16 :

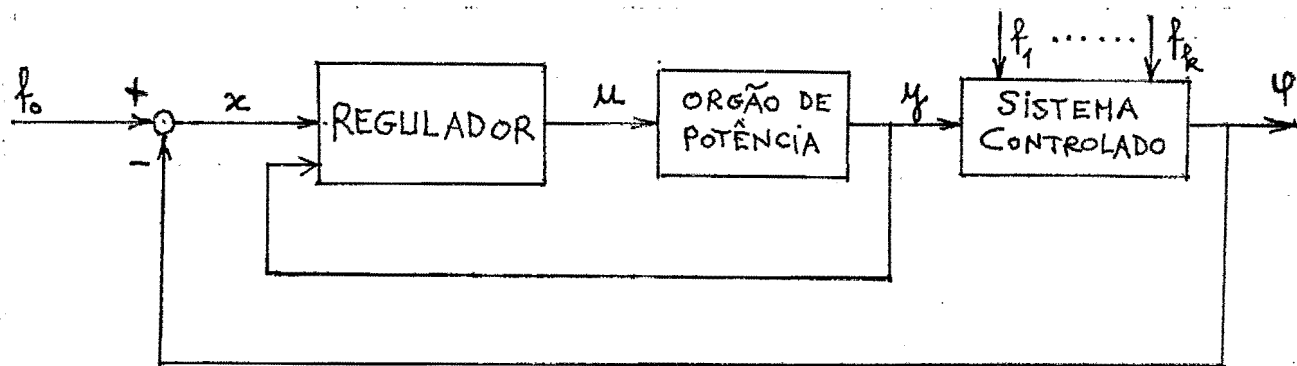


Figura 3.16

O sistema controlado é regido pela equação :

$$\phi^{(n-m)} + \sum_{i=0}^{n-m-1} b_i(t) \phi^{(i)} = y - F_1(t) \quad (3.15)$$

onde :

$b_i(t) \rightarrow$  parâmetros do sistema controlado

$$b_{i_{\min}}^{(j)} < b_i^{(j)} < b_{i_{\max}}^{(j)}$$

sendo

$$i = 0, 1, \dots, n-m-1$$

$$j = 0, 1, \dots, m$$

$$b_i^{(j)} = \frac{d^j b_i}{dt^j}$$

$$b_{i_{\max}}^{(j)} \text{ e } b_{i_{\min}}^{(j)} \text{ são constantes}$$

$n$  = ordem do conjunto órgão de potência - sistema controlado.

$m$  = ordem do órgão de potência.

$F_1(t)$  = perturbações ( $f_1, \dots, f_k$ ) e suas derivadas, tudo referido à entrada do sistema controlado.

A equação que descreve o comportamento do órgão de potência é :

$$y^{(m)} + \sum_{i=0}^{m-1} d_i y^{(i)} = u \quad (3.16)$$

onde:

$d_i$  = constante (supõe-se que o órgão de potência é estacionário) .

O objetivo do controle é manter  $x$ , o erro do sistema, sempre nulo, isto é, é levar o estado do sistema à origem do espaço da fase,  $x_i = 0$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) . Esse objetivo poderá ser atingido, para uma certa classe de perturbações, forçando o sistema a entrar em regime de escorregamento numa dada superfície, a qual não depende dos parâmetros  $b_i(t)$  do sistema controlado. Serão introduzidas descontinuidades no sinal de controle,  $u$ , a fim

de se obter o regime de escorregamento.

Inicialmente, se deve representar o sistema no espaço de fase dos  $x$ .

Tem-se :

$$x = f_o - \phi \quad (3.17)$$

Seja

$$\frac{dx_i}{dt} = x_{i+1} \quad \text{para} \quad i=1, \dots, n-1$$

e

$$x = x_1$$

Por (3.17), vem:

$$\phi = f_o - x_1 \quad ,$$

donde:

$$\phi^{(i)} = f_o^{(i)} - x_{i+1}$$

Substituindo em (3.15), vem :

$$f_o^{(n-m)} + \sum_{i=0}^{n-m-1} b_i(t) f_o^{(i)} - x_{n-m+1} - \sum_{i=0}^{n-m-1} b_i(t) x_{i+1} = y - F_1(t)$$

Fazendo

$$F = f_o^{(n-m)} + \sum_{i=0}^{n-m-1} b_i(t) f_o^{(i)} + F_1(t)$$

tem-se então :

$$y = -x_{n-m+1} - \sum_{i=0}^{n-m-1} b_i(t) x_{i+1} \quad ,$$

donde:

$$y^{(i)} = - \sum_{j=0}^{n-m-1} \sum_{k=0}^{k=i} C_i^k b_j^{(k)} x_{j+i-k+1} - x_{n-m+i+1} + F^{(i)}$$

$$C_i^k = \frac{i!}{k!(i-k)!}$$

ou

$$y^{(i)} = - \sum_{j=1}^{n-m+i+1} r_{ij}(t) x_j + F^{(i)} \quad (3.18)$$

$$i=0,1,\dots,m-1 \quad ; \quad r_{i,n-m+i+1} = 1$$

$$j = 0,1,\dots,n$$

Substituindo o valor de  $y^{(i)}$  dado em (3.18) na equação do órgão de potência (3.16), vem:

$$- \sum_{j=1}^{n+1} r_{mj}(t) \cdot x_j + F^{(m)} + \sum_{i=0}^{m-1} d_i \left[ - \sum_{j=0}^{n-m+i+1} r_{ij}(t) \cdot x_j + F^{(i)} \right] = u$$

onde

$$r_{m,n+1} = 1$$

Então, no espaço de fase, o sistema será representado por:

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = x_{i+1} & i=1,2,\dots,n-1 \\ \frac{dx_n}{dt} = - \sum_{j=1}^n r_{mj}(t) x_j - \sum_{i=0}^{m-1} d_i \left[ \sum_{j=0}^{n-m+i+1} r_{ij}(t) \cdot x_j \right] + F^{(m)} + \sum_{i=0}^{m-1} d_i F^{(i)} - u \end{cases} \quad (3.19)$$



Agora introduz-se um sinal de controle  $u$ , apresentando descontinuidades de primeira espécie, de modo a fazer com que o sistema entre em regime de escorregamento no hiperplano definido por:

$$s = \sum_{i=1}^n c_i x_i = 0, \quad c_i = \text{constante} \quad (3.20)$$

$$c_n = 1$$

não obstante as perturbações e as variações de parâmetros. Ter-se-á, então, um sistema pouco sensível a essas perturbações e variações de parâmetros (sistema quase-invariante). Isso será conseguido para uma certa classe de perturbações, e variações de parâmetros tais que:

$$b_{i_{\min}}^{(j)} < b_i^{(j)} < b_{i_{\max}}^{(j)} \quad (3.21)$$

Essa condição deve ser imposta aos parâmetros, pois assim os  $r_{ij}(t)$  serão limitados, e portanto, a condição B (Apêndice I), que garante a existência da solução de Filippov da equação (3.19), será satisfeita.

O sinal de controle será:

$$u = \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i^x x_i - \sum_{i=0}^{m-1} \psi_i^y y^{(i)} \quad (3.22)$$

onde:

$$\psi_i^x = \begin{cases} x \\ w_i \\ \text{ou} \\ x \\ \lambda_i \end{cases} \quad e \quad \psi_i^y = \begin{cases} y \\ w_i \\ \text{ou} \\ y \\ \lambda_i \end{cases}$$

A parcela de  $u$  correspondente aos  $x_i$  compensará as variações de parâmetros, e a correspondente aos  $y^{(i)}$ , as perturbações.

Se  $F^{(i)} = 0$ ,  $i=0,1,\dots,m$ , então faz-se  $\psi_i^y = 0 \quad \forall i$

Substituindo (3.22) em (3.19), vem:

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = x_{i+1} & i=1,2,\dots,n-1 \\ \frac{dx_n}{dt} = - \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i^x x_i - \sum_{j=1}^n r_{mj}(t)x_j - \sum_{i=0}^{m-1} (d_i + \psi_i^y) \left[ \sum_{j=1}^{n-m+i+1} r_j(t)x_j \right] + \\ + F^{(m)} + \sum_{i=0}^{m-1} (d_i + \psi_i^y) \cdot F^{(i)} \end{cases}$$

Fazendo

$$\sum_{j=1}^n r_{mj}(t)x_j + \sum_{i=0}^{m-1} (d_i + \psi_i^y) \left[ \sum_{j=1}^{n-m+i+1} r_{ij}(t)x_j \right] = \sum_{i=1}^n a_i(t)x_i$$

vem:

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = x_{i+1} & i=1,\dots,n-1 \\ \frac{dx_n}{dt} = - \sum_{i=1}^n a_i(t) \cdot x_i - \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i^x x_i + \sum_{i=0}^{m-1} (d_i + \psi_i^y) F^{(i)} + F^{(m)} \end{cases} \quad (3.23)$$

Agora deve-se estabelecer as leis de variação dos coeficientes  $\psi_i^x$  e  $\psi_i^y$  de tal forma que o hiperplano definido por

(3.20) seja uma superfície de escorregamento.

A condição necessária e suficiente para que  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid s(x)=0\}$  seja uma superfície de escorregamento, é que  $\dot{s} < 0$ , quando  $s \rightarrow 0$ .

No caso:

$$\dot{s} = \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_{i+1} + \frac{dx_n}{dt}$$

Substituindo  $\frac{dx_n}{dt}$  por seu valor dado em (3.23),

vem :

$$\dot{s} = \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_{i+1} - \sum_{i=1}^n a_i(t) x_i - \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i^x x_i + \sum_{i=0}^{m-1} (d_i + \psi_i^y) F^{(i)} + F^{(m)}$$

Como  $f^-$  e  $f^+$  devem existir, e ser contínuas, pode-se, no momento, fazer  $s=0$  na expressão de  $\dot{s}$ . Em seguida, impõe-se as condições de desigualdade em  $\psi_i^x$  e  $\psi_i^y$  para que se tenha  $\dot{s} < 0$ , quando  $s \rightarrow 0$ .

Seja portanto  $\dot{s}_S$  o valor de  $\dot{s}$  na vizinhança de  $S$ .

Logo,

$$x_n = - \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_i, \quad \text{e} :$$

$$\dot{s}_S = \sum_{i=1}^{n-1} \left[ c_{i-1} - a_i(t) - \psi_i^x - c_{n-1} \cdot c_i + a_n c_i \right] x_i + \sum_{i=0}^{m-1} (d_i + \psi_i^y) F^{(i)} + F^{(m)} \quad (3.24)$$

$$c_0 = 0$$

Separando-se as parcelas correspondentes aos parâmetros e às perturbações, vem:

$$\dot{s}_S = \dot{s}_{S1} + \dot{s}_{S2}$$

onde

$$\dot{s}_{S1} = \sum_{i=1}^{n-1} \left[ c_{i-1} - a_i(t) - \psi_i^x - c_{n-1}c_i + a_n c_i \right] x_i$$

$$\dot{s}_{S2} = \sum_{i=0}^{m-1} (d_i + \psi_i^y) F^{(i)} + F^{(m)}$$

Uma condição suficiente para que  $\dot{s}_S < 0$ , é que  $\dot{s}_{S1} < 0$  e  $\dot{s}_{S2} < 0$ .

Para satisfazer a essas condições, toma-se então:

$$\psi_i^x = \begin{cases} w_i^x & \text{para } x_i s > 0 \\ \lambda_i^x & \text{para } x_i s < 0 \end{cases} \quad i=1, \dots, n-1 \quad (3.25)$$

e

$$\psi_i^y = \begin{cases} w_i^y & \text{para } F^{(i)} s > 0 \\ \lambda_i^y & \text{para } F^{(i)} s < 0 \end{cases} \quad i=0, 1, \dots, n-1 \quad (3.26)$$

sendo que:

$$w_i^x > \sup_{b_i(j), \psi_i^y} \left[ c_{i-1} - a_i(t) - c_{n-1}c_i + a_n c_i \right] \quad (3.27)$$

$$\lambda_i^x < \inf_{b_i(j), \psi_i^y} \left[ c_{i-1} - a_i(t) - c_{n-1}c_i + a_n c_i \right]$$

e, para uma classe de sinais externos  $F$  tais que :

$$\frac{|F^{(m)}|}{\sum_{i=0}^{m-1} |F^{(i)}|} < A \quad , \text{ onde } A > 0, \text{ constante } , \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} w_i^y &= -A - d_i \\ \lambda_i^y &= A - d_i \quad i=0,1,\dots,m-1 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Satisfeitas essas condições, se o ponto representativo se encontra numa vizinhança do hiperplano  $S$ , será atraído por este, e o sistema entrará então em regime de escorregamento, e será regido por:

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = x_{i+1} & i=1,2,\dots,n-2 \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} = - \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_i \end{cases} \quad (3.30)$$

Com uma escolha conveniente dos  $c_i$ , pode-se garantir a estabilidade do regime de escorregamento.

Para que o sistema seja globalmente estável, qualquer que seja a condição inicial, o ponto deve atingir a vizinhança do hiperplano. Para isso, os coeficientes  $\psi_i^x$  e  $\psi_i^y$  devem satisfazer também a outras condições (Capítulo 4), que podem ser obtidas por um critério de estabilidade, como, por exemplo, o segundo método de Liapunov.

Um inconveniente da lei de controle (3.26) é a necessidade de informação direta sobre os sinais  $F^{(i)}$ , aplicados ao sistema.

Entretanto, a expressão (3.18) sugere a substituição dos sinais  $F^{(i)}$  pelos sinais  $y^{(i)}$ , a qual, sob certas condições que serão determinadas, garantirá também a existência do escorregamento no hiperplano  $S$ . A lei de controle será então :

$$\psi_i^y = \begin{cases} w_i^y & \text{para } y^{(i)}_s > 0 \\ \lambda_i^y & \text{para } y^{(i)}_s < 0 \end{cases} \quad i=0,1,\dots,m-1 \quad (3.31)$$

Dessa forma, o que se faz na realidade é obter, através dos sinais  $y^{(i)}$ , pela expressão (3.18), informação sobre os sinais  $F^{(i)}$ . Em outras palavras, utiliza-se o próprio órgão de potência para medir os sinais  $F^{(i)}$ .

O problema agora é o seguinte: dados  $w_i^y$  e  $\lambda_i^y$  de acordo com (3.29), que condições se deve impor em  $w_i^x$  e  $\lambda_i^x$  para garantir a existência do escorregamento em todo o hiperplano  $S$ , no sistema com a lei de controle (3.31) ?

Se as relações (3.27) são satisfeitas, então, pela lei (3.25), para  $F \equiv 0$ , a condição de escorregamento é garantida em todos os pontos do hiperplano  $S$ .

No caso de existência de sinais externos, isto é,  $F \neq 0$ , a condição de escorregamento poderá ser garantida, independentemente dos valores de  $\psi_i^y$ , apenas fora de uma certa região  $E_1$  não estacionária do hiperplano  $S$ , definida pela desigualdade:

$$\left| \sum_{i=1}^{n-1} N_1 x_i \right| < \left| \sum_{i=0}^{m-1} (d_i + \psi_i^y) F^{(i)} + F^{(m)} \right| \quad (3.32)$$

onde

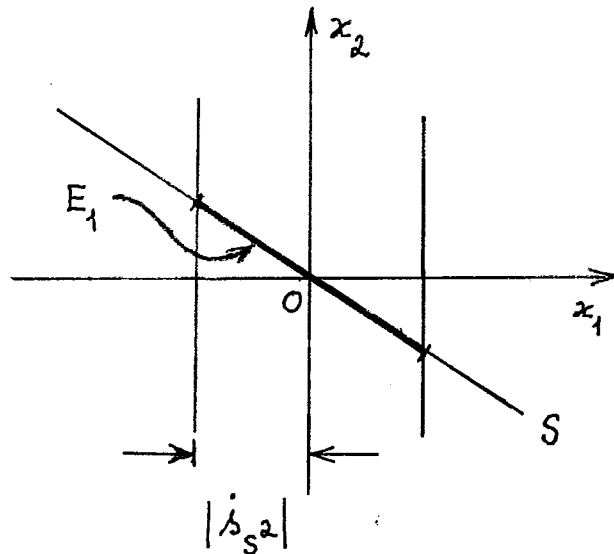
$$N_i = c_{i-1} - a_i(t) - \psi_i^x - c_{n-1}c_i + a_n c_i$$

Fora da região  $E_1$  tem-se, pois:

$$|\dot{s}_{s1}| < |\dot{s}_{s2}|$$

Vê-se pela desigualdade (3.32) que os sinais exteriores podem provocar a perda do escorregamento perto da origem. A Figura 3.17, onde está mostrada a região  $E_1$ , para um caso de um sistema de segunda ordem, esclarece esse fato.

Figura 3.17



Partindo de (3.32), é possível determinar os vértices da maior região  $E_1$  possível, que será chamada  $E_{1M}$ . Depois impõe-se que as leis (3.26) e (3.31) coincidam em  $E_{1M}$ .

De (3.28), tem-se:

$$|F^{(m)}| \leq A \sum_{i=0}^{m-1} |F^{(i)}| \quad (3.33)$$

Substituindo (3.33) em (3.32), vem:

$$\left| \sum_{i=1}^{n-1} N_i x_i \right| < \left| \sum_{i=0}^{m-1} (d_i + \psi_i^y) F^{(i)} \right| + A \sum_{i=0}^{m-1} |F^{(i)}|$$

Mas

$$F^{(i)} \leq |F^{(i)}|$$

Logo

$$\left| \sum_{i=1}^{n-1} N_i x_i \right| < \left| \sum_{i=0}^{m-1} (d_i + \psi_i^y + A) |F^{(i)}| \right|$$

Para  $\psi_i^y = w_i^y$ , tem-se, por (3.29) :

$$\left| \sum_{i=1}^{n-1} N_i x_i \right| < \left| \sum_{i=0}^{m-1} (0) |F^{(i)}| \right| = 0$$

Nesse caso,  $E_1 = \phi$ , e existe escorregamento em todo ponto de  $S$ .

Para  $\psi_i^y = \lambda_i^y$ , tem-se, por (3.29) :

$$\left| \sum_{i=1}^{n-1} N_i x_i \right| < \left| \sum_{i=0}^{m-1} (2A) |F^{(i)}| \right|$$

ou

$$\left| \sum_{i=1}^{n-1} N_i x_i \right| < 2A \sum_{i=0}^{m-1} |F^{(i)}|$$

Seja agora :

$$|F^{(k)}| = \sup_{i=0,1,\dots,m-1} |F^{(i)}|$$



Então :

$$\sum_{i=0}^{m-1} |F^{(i)}| \leq m |F^{(k)}|$$

e

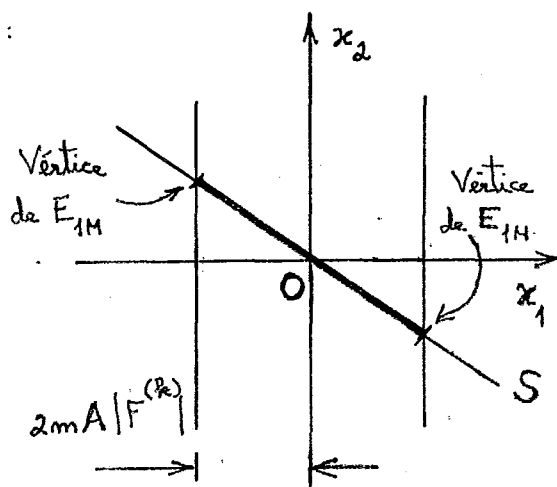
$$\left| \sum_{i=1}^{n-1} N_i x_i \right| < 2mA |F^{(k)}|$$

No  $R^n$ , a região  $E_{1M}$  tem  $(2n-2)$  vértices cujas coordenadas são:

$$(0, \dots, 0, \pm x_i^1, 0, \dots, 0, -c_i x_i^1)$$

$$i=1, 2, \dots, n-1$$

Figura 3.18



Logo,

$$|N_1 x_0 + N_2 x_0 + \dots + N_i x_i^1 + N_{i+1} x_0 + \dots + N_{n-1} x_0| < 2mA |F^{(k)}|$$

$$|N_i x_i^1| < 2mA |F^{(k)}|$$

Donde:

$$|x_i^1| < \frac{2mA |F^{(k)}|}{\inf_{b, \Psi} |N_i|} \quad i=0, 1, \dots, m-1 \quad (3.34)$$

Na região  $E_{1M}$ , com  $i=k$ , as leis (3.26) e (3.31) coincidirão se:

$$\text{sinal } F^{(k)} = \text{sinal } y^{(k)} \quad (3.35)$$

Pela equação (3.18), a relação (3.35) será satisfeita se :

$$|F^{(k)}| \geq \left| \sum_{j=0}^{n-m+k+1} r_{kj} x_j \right| \quad (3.36)$$

A desigualdade (3.36) define uma região  $D \subset R^n$ , convexa fechada. A relação (3.35) será válida em toda a região  $E_{1M}$  se  $E_{1M} \subset D$ . Como  $D$  é convexa, basta que cada um dos vértices de  $E_{1M}$  pertença a  $D$ , ou, por (3.34) e (3.36):

$$\sup_{b, \psi_i^y} \frac{2mA |r_{ki}|}{|N_i|} \leq 1 \quad k=0,1,\dots,m-2, \quad i=1,\dots,n-1 \quad (3.37)$$

$$\sup_{b, \psi_i^y} \frac{2mA |r_{m-1,i} - c_i|}{|N_i|} \leq 1 \quad i=1,\dots,n-1$$

Sendo satisfeitas as condições (3.37), as leis (3.26) e (3.31) coincidirão, na região  $E_{1M}$ . Ter-se-á, então:

$$\begin{aligned} (d_i + \psi_k^y) F^{(k)} &\geq 0 & \text{se } s < 0 \\ (d_i + \psi_k^y) F^{(k)} &\leq 0 & \text{se } s > 0 \end{aligned} \quad (3.38)$$

As relações (3.37) foram obtidas, para  $i=k$ . Pode-se repetir o raciocínio para cada  $i$  e obter-se então as condições gerais que permitem substituir  $F^{(i)}$  por  $y^{(i)}$  na lei de

controle.

Suponha-se então que as relações (3.37) sejam satisfeitas. Logo, de acordo com a lei (3.25), e com (3.38), independentemente dos valores de  $\psi_i^y$  ( $i \neq k$ ), no hiperplano  $S$ , é possível garantir a condição de existência do escorregamento na região não estacionária  $E_2 \subset E_1$ , definida pela desigualdade:

$$\left| \sum_{i=1}^{n-1} N_i x_i \right| + A |F^{(k)}| < \left| \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{m-1} (d_i + \psi_i^y) F^{(i)} + F^{(m)} \right| \quad (3.39)$$

Por (3.29), (3.31), (3.39) e pela equação do hiperplano (3.20), obtêm-se as  $(2n-2)$  coordenadas dos vértices da maior região  $E_2$  possível, que será chamada  $E_{2M}$ :

$$(0, \dots, 0, \pm x_i^2, 0, \dots, 0, -c_i x_i^2) \quad i=1, \dots, n-1$$

De (3.39), vem :

$$\left| \sum_{i=1}^{n-1} N_i x_i \right| + A |F^{(k)}| < A \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{m-1} |F^{(i)}| + |F^{(m)}|$$

$$\left| \sum_{i=1}^{n-1} N_i x_i \right| < A \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{m-1} |F^{(i)}| + |F^{(m)}| - A |F^{(k)}|$$

Donde:

$$|x_i^2| < \frac{A \sum_{i=0, i \neq k}^{m-1} |F^{(i)}| + |F^{(m)}| - A |F^{(k)}|}{\inf_{b, \psi_i^y} |N_i|} \quad (3.40)$$

Se

$$A \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{m-1} |F^{(i)}| + |F^{(m)}| - A|F^{(k)}| < 0$$

então,  $E_2 = \phi$ , e existe escorregamento em toda a superfície  $S$ .

Mas, de (3.28), tem-se :

$$|F^{(m)}| \leq A \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{m-1} |F^{(i)}| + A |F^{(k)}|$$

Donde:

$$|F^{(m)}| - A|F^{(k)}| \leq A \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{m-1} |F^{(i)}|$$

Substituindo em (3.40), vem:

$$|x_i^2| < \frac{2A \sum_{i=0, i \neq k}^{m-1} |F^{(i)}|}{\inf_{b, \psi_i^j} |N_i|}$$

Agora, fazendo:

$$|F^{(\ell)}| = \sup_{\substack{i=0,1,\dots,m-1 \\ i \neq k}} |F^{(i)}|$$

vem ,

$$|x_i^2| < \frac{2(m-1)A|F^{(\ell)}|}{\inf_{b, \psi_i^y} |N_i|} \quad (3.41)$$

Na região  $E_{2M}$ , para  $i=\ell$ , as leis (3.26) e (3.31)

coincidirão se :

$$\text{sinal } F^{(\ell)} = \text{sinal } y^{(\ell)}$$

Por (3.18), a relação acima será válida se :

$$|F^{(\ell)}| \geq \sum_{j=0}^{n-m+\ell+1} r_{\ell j} x_j$$

Obtem-se, portanto, condições análogas às das relações (3.37) :

$$\sup_{b, \psi_i^y} \frac{2(m-1)A|r_{\ell i}|}{|N_i|} \leq 1 \quad \begin{array}{ll} \ell=0,1,\dots,m-2 & \ell \neq k \\ i=1,\dots,n-1 \end{array} \quad (3.42)$$

$$\sup_{b, \psi_i^y} \frac{2(m-1)A|r_{m-1,i} - c_i|}{|N_i|} \leq 1 \quad i=1,\dots,n-1$$

Note-se que, uma vez satisfeitas as relações (3.37), automaticamente serão satisfeitas também as relações (3.42).

Repetindo-se o mesmo procedimento, obtém-se uma região  $E_{mM}$  tal que, sendo satisfeitas as desigualdades (3.37), fora desta região a condição de escorregamento existe, e dentro dela as leis (3.26) e (3.31) coincidirão, para todo  $i$ .

As desigualdades (3.37) podem sempre ser satisfeitas por uma escolha conveniente dos coeficientes  $w_i^x$  e  $\lambda_i^x$ , e ter-se-á então garantia da condição de escorregamento em todo o hiperplano  $S$ , sem necessidade de uma medida direta dos sinais exteriores  $F^{(i)}$ .

Uma outra lei de controle, de implementação mais simples é :

$$u = \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i^x x_i - \psi^K \quad (3.43)$$

Substituindo (3.43) em (3.19), vem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_i}{dt} = x_{i+1} \quad i=1, \dots, n-1 \\ \frac{dx_n}{dt} = - \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i^x x_i - \sum_{j=1}^n r_{mj}(t)x_j - \sum_{i=0}^{m-1} d_i \left[ \sum_{j=0}^{n-m+i+1} r_{ij}(t)x_j \right] + \\ + F^{(m)} + \sum_{i=0}^{m-1} d_i F^{(i)} + \psi^K \end{array} \right.$$

Fazendo :

$$\sum_{j=1}^n r_{mj}(t)x_j + \sum_{i=0}^{m-1} d_i \left[ \sum_{j=0}^{n-m+i+1} r_{ij}(t)x_j \right] = \sum_{i=1}^n \ell_i(t)x_i$$

tem-se :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_i}{dt} = x_{i+1} \quad i=1, \dots, n-1 \\ \frac{dx_n}{dt} = - \sum_{i=1}^n \ell_i x_i - \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i^x x_i + F^{(m)} + \sum_{i=0}^{m-1} d_i F^{(i)} + \psi^K \end{array} \right.$$

Procedendo-se da mesma maneira que no caso anterior, se deve agora estabelecer as leis de variação dos coeficientes  $\psi_i^x$  e  $\psi^K$  de tal maneira que o hiperplano definido por (3.20) seja uma superfície de escorregamento.

Chega-se então a :

$$\dot{s}_S = \sum_{i=1}^{n-1} \left[ c_{i-1} - \ell_i(t) - \psi_i^x - c_{n-1}c_i + \ell_n c_i \right] x_i + F^{(m)} + \sum_{i=0}^{m-1} d_i F^{(i)} + \psi^K, \\ c_0 = 0$$

expressão análoga à expressão (3.24).

Separando-se as parcelas correspondentes aos parâmetros e às perturbações, vem:

$$\dot{s}_S = \dot{s}_{S1} + \dot{s}_{S2} \\ \dot{s}_{S1} = \sum_{i=1}^{n-1} \left[ c_{i-1} - \ell_i(t) - \psi_i^x - c_{n-1}c_i + \ell_n c_i \right] x_i \\ \dot{s}_{S2} = F^{(m)} + \sum_{i=0}^{m-1} d_i F^{(i)} + \psi^K$$

Uma condição suficiente para que  $\dot{s}_S < 0$ , é que  $\dot{s}_{S1} < 0$  e  $\dot{s}_{S2} < 0$ .

Para satisfazer a  $\dot{s}_{S1} < 0$ , escolhe-se  $\psi_i^x$  de acordo com :

$$\psi_i^x = \begin{cases} w_i^x & \text{para } x_i s > 0 \\ \lambda_i^x & \text{para } x_i s < 0 \end{cases} \quad i=1, \dots, n-1$$

sendo que :

$$w_i^x > \sup_{b_i^{(j)}} \left[ c_{i-1} - \ell_i(t) - c_{n-1}c_i + \ell_n c_i \right]$$

$$\lambda_i^x < \inf_{b_i^{(j)}} \left[ c_{i-1} - \ell_i(t) - c_{n-1}c_i + \ell_n c_i \right]$$

Para satisfazer a  $\dot{s}s_{S^2} < 0$  , deve-se ter :

$$(F^{(m)} + \sum_{i=0}^{m-1} d_i F(i) + \psi^K) s < 0$$

Se  $s > 0$ , deve-se ter :

$$F^{(m)} + \sum_{i=0}^{m-1} d_i F(i) + \psi^K < 0$$

Donde ,

$$\psi^K < -F^{(m)} - \sum_{i=0}^{m-1} d_i F(i)$$

Se  $s < 0$ , deve-se ter :

$$F^{(m)} + \sum_{i=0}^{m-1} d_i F(i) + \psi^K > 0$$

Donde ,

$$\psi^K > -F^{(m)} - \sum_{i=0}^{m-1} d_i F(i)$$

A lei será, portanto :

$$\psi^K = \begin{cases} w^K & \text{se } s < 0 \\ \lambda^K & \text{se } s > 0 \end{cases} \quad (3.44)$$



sendo que :

$$\begin{aligned} w^K &> \sup \left[ -F^{(m)} - \sum_{i=0}^{m-1} d_i F^{(i)} \right] \\ \lambda^K &< \inf \left[ -F^{(m)} - \sum_{i=0}^{m-1} d_i F^{(i)} \right] \end{aligned} \quad (3.45)$$

Com a lei (3.44), (3.45), não há necessidade de se medir o sinal dos sinais exteriores  $F^{(i)}$ . Basta medir-se o sinal de  $s$ . E só há uma restrição (como a restrição (3.28), por exemplo) quanto aos sinais externos. É necessário apenas se conhecer o supremo e o ínfimo, da expressão indicada em (3.45).

Até agora não foi imposta nenhuma restrição no sinal de controle  $u$ , e foi possível garantir a existência do escorregamento em toda a superfície  $S$ .

Ver-se-á agora como uma restrição no sinal de controle afeta a condição de escorregamento de um sistema de controle a estrutura variável.

Suponha-se que o sinal de controle deve satisfazer à condição:

$$-u_M < u(x,y) < u_M \quad (3.46)$$

Num problema real, essa restrição sempre existe.

Considere-se inicialmente o controle dado por (3.22), no qual

$$F^{(i)} \equiv 0 \quad i=1, \dots, m.$$

Tem-se, pois :

$$u = \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i^x x_i, \text{ onde } \psi_i^x = \begin{cases} w_i^x & \text{se } x_i s > 0 \\ \lambda_i^x & \text{se } x_i s < 0 \end{cases}$$

Para que seja respeitada a condição (3.46), o sinal de controle deve ser dado por :

$$(3.47) \quad \begin{cases} u = +u_M & \text{se } \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i^x x_i \geq +u_M & (s > 0) & (1) \\ u = \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i^x x_i & \text{se } -u_M < \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i^x x_i < +u_M & (2) \\ u = -u_M & \text{se } \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i^x x_i \leq -u_M & (s < 0) & (3) \end{cases}$$

Só é possível garantir a existência do regime de escorregamento, no domínio definido por (2), em (3.47). Entretanto, pode ocorrer o escorregamento fora do domínio definido por (2), pois os  $\psi_i^x$  são escolhidos a partir de relações de desigualdade, provenientes de condições de suficiência.

Para determinar o domínio de garantia de existência do regime de escorregamento, considere-se a expressão de  $\dot{s}$ , dada por

$$\dot{s} = \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_{i+1} - \sum_{j=1}^n r_{mj}(t) x_j - \sum_{i=0}^{m-1} d_i \left[ \sum_{j=0}^{n-m+i+1} r_{ij}(t) x_j \right] - u$$

Essa expressão pode ser colocada sob a forma :

$$\dot{s} = g(b_j(t), d_k, c_i, x_i) - u \quad (3.48)$$

$$j = 0, 1, \dots, n-m-1$$

$$k = 0, \dots, m-1$$

$$i = 1, \dots, n$$

A condição de existência do regime de escorregamento é :

$$\dot{s} > 0 \quad \text{quando } s \rightarrow 0^-$$

$$\dot{s} < 0 \quad \text{quando } s \rightarrow 0^+$$

Portanto, deve-se ter :

$$\begin{aligned} g(b_j(t), d_k, c_i, x_i) - u^- &> 0 \\ g(b_j(t), d_k, c_i, x_i) - u^+ &< 0 \end{aligned} \quad \text{ou} \quad u = \begin{cases} u^- & \text{quando } s < 0 \\ u^+ & \text{quando } s > 0 \end{cases}$$

Resumindo , tem-se :

$$u^- < g(b_j(t), d_k, c_i, x_i) < u^+ \quad (3.49)$$

A existência de uma limitação sobre  $u$  implica em :

$$u_{\min} < g(b_j(t), d_k, c_i, x_i) < u_{\max}$$

Considerando-se (3.46), e as variações de parâmetros, vem:

$$\sup_{b_j(t)} |g(b_j(t), d_k, c_i, x_i)| < u_M \quad (3.50)$$

Por conseguinte, se pode determinar um domínio  $D \subset S$  , no qual está garantida a condição de existência do regime de escorregamento. A fronteira desse domínio é definida pelas equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sup_{b_j(t)} |g(b_j(t), d_k, c_i, x_i)| = u_M \\ \sum_{i=1}^n c_i x_i = 0 \end{array} \right. \quad (3.51)$$

Portanto, para projetar um sistema de controle, no qual o controle é limitado, determina-se o domínio  $G$ , do espaço dos  $x_i$ , no qual se deseja obter escorregamento. De posse desse domínio, determina-se então os coeficientes  $c_i$  do hiperplano, de maneira que  $(G \cap S) \subset D$ .

Reconsidere-se a lei (3.22), desta feita com :

$$F^{(i)} \neq 0 \quad i=0,1,\dots,m$$

Agora, a expressão de  $\dot{s}$  será :

$$\dot{s} = g(b_j(t), d_k, c_i, x_i) + F^{(m)} + \sum_{i=0}^{m-1} d_i F^{(i)} - u$$

Suponha-se também que :

$$|F^{(m)} + \sum_{i=0}^{m-1} d_i F^{(i)}| < E, \quad E > 0 \quad \text{constante}$$

Ter-se-ã então, analogamente a (3.49) :

$$u^- + E < g(b_j(t), d_k, c_i, x_i) < u^+ - E$$

Obtem-se, portanto, uma expressão análoga à expressão (3.50) :

$$\sup_{b_j(t)} |g(b_j(t), d_k, c_i, x_i)| < u_M - E \quad (3.52)$$

Uma condição necessária para existir escorregamento

é :

$$E < u_M$$

Vê-se pela expressão (3.52) que o efeito das perturbações num sistema de controle a estrutura variável, no qual a amplitude do sinal de controle é limitada, é a redução do domínio garantido de existência do regime de escorregamento.

Foram introduzidos os sistemas de controle a estrutura variável, e apresentados alguns procedimentos para a sua síntese. Em particular, foram estudados os sistemas cujas funções de transferência não contêm zeros. Em [8] e [12], é feito o estudo para o caso de funções de transferência que contêm zeros.

Existem também alguns estudos ([10], [21] e [22]) para sistemas não perturbados, descritos por :

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_n x = -u = -\alpha \phi(x)$$

$$|\alpha| \leq 1, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Os sistemas são analisados considerando-se diversas formas da função  $\phi$ , incluindo os casos em que  $\phi$  é limitada, e casos nos quais  $a_n = 0$ , isto é, quando as funções de transferência têm um polo na origem.

Em [13], é sugerido adicionar impulsos no sinal de controle, a fim de melhorar a qualidade do regime de escorregamento, no caso de informação incompleta sobre o estado do sistema (ou mesmo utilizar um sinal de controle totalmente impulsional), e em [12] usa-se superfícies de escorregamento não lineares, com o

intuito de melhorar as propriedades do regime de escorregamento.

Uma das vantagens dos sistemas de controle a estrutura variável é que eles garantem um comportamento dinâmico escolhido a priori, mesmo para sistemas cujos parâmetros variam em grandes proporções, ou sejam mal identificados, o que é equivalente, na fase de projeto. Para isso, os parâmetros do controlador são determinados a partir de relações de desigualdade.

No próximo capítulo serão dadas as condições de invariância e será estudada a estabilidade dos sistemas de controle a estrutura variável. Será mostrado inclusive que esses sistemas de controle podem ser considerados como um resultado da aplicação do segundo método de Liapunov, na síntese de sistemas de controle em malha fechada.

## CAPÍTULO 4

### INVARIÂNCIA E ESTABILIDADE DOS SISTEMAS DE CONTROLE A ES- TRUTURA VARIÁVEL

No Capítulo 2 foi visto que, no regime de escorregamento, a equação que rege o comportamento dinâmico do sistema, não é mais a equação original (2.1), e sim a equação (2.13), onde  $f^0$  é definida segundo o lema (2.1).

Nos sistemas de controle a estrutura variável, provoca-se o escorregamento com o intuito de tornar o sistema invariante, isto é, independente dos parâmetros de  $f$ . Isso ocorrerá se  $f^0$  não depender dos parâmetros de  $f$ .

Neste capítulo, serão discutidas as condições de invariância e estabilidade dos sistemas de controle a estrutura variável. A noção de conjunto invariante permite, através do segundo método de Liapunov, estabelecer uma ligação entre esses dois estudos, no caso de sistemas autônomos.

#### 4.1 - Invariância dos Sistemas de Controle a Estrutura Variável

É possível distinguir dois tipos de invariância: invariância no espaço, e invariância no tempo. A noção de invariância no espaço advém do conceito de conjunto invariante.

Considere-se o sistema (2.1):

Um conjunto  $S \subset G$  é dito invariante se toda trajetória começando em um ponto  $x_0 \in S$ , permanece em  $S$  para todo  $t \geq t_0$ .

Vê-se, portanto, (teorema 2.2), que uma superfície de escorregamento é um conjunto invariante.

Por outro lado, diz-se que um sistema é invariante no tempo se o seu comportamento dinâmico é independente dos valores instantâneos dos parâmetros e das perturbações.

No caso dos sistemas de controle a estrutura variável nos quais existe o regime de escorregamento, é garantida, pois, a invariância no espaço. Entretanto, para haver invariância no tempo, é necessário que  $f^0$  (definida no lema 2.1) não dependa dos parâmetros nem das perturbações contidos em  $f$ , para todo  $x(t) \in S$ .

Serão dadas agora as condições para que um sistema linear, com uma entrada, seja invariante no tempo, em regime de escorregamento num hiperplano passando pela origem. Refere-se ao artigo [23].

Considere-se o sistema regido por :

$$\dot{x} = Ax + Bu + Dp \quad (4.1)$$

onde:

$$x \in R^n, \quad A \text{ é } n \times n, \quad B = [b_1 b_2 \dots b_n]^T, \quad D \text{ é } n \times L, \quad p \in R^L, \\ u \in R$$

Não há nenhuma condição imposta sobre a forma da matriz  $A$ , de maneira que as variáveis de estado podem ser quaisquer.

O hiperplano de escorregamento é definido por :

$$H = \{x \in R^n \mid s = \langle c, x \rangle = 0\} \quad (4.2) \\ c \in R^n$$



Admite-se que o sinal de controle  $u$  apresenta descontinuidades de primeira espécie, de forma a garantir a existência do regime de escorregamento no hiperplano definido em (4.2).

Em regime de escorregamento, o comportamento do sistema não é mais regido por (4.1) (Ver lema 2.1), e sim pela equação do hiperplano. Então, para  $x \in H$ , isto é, para condições iniciais sobre o hiperplano, deve-se calcular o valor de  $u$  tal que o sistema (4.1) evolua de acordo com a equação de  $H$ . Esse valor de  $u$ , é o sinal de controle  $u_e$  em regime de escorregamento.

No escorregamento tem-se :

$$\langle c, x \rangle = 0$$

No caso, como a superfície de escorregamento é um hiperplano, tem-se também :

$$\langle c, \dot{x} \rangle = 0$$

isto é, o vetor velocidade também pertence ao hiperplano.

Substituindo  $\dot{x}$  por seu valor dado em (4.1), vem:

$$\langle c, Ax + Bu_e + Dp \rangle = 0 \quad (4.3)$$

Note-se que  $u_e$ , na expressão (4.3), é definido a partir do lema (2.1) .

Tem-se, pois :

$$c^T Ax + c^T Bu_e + c^T Dp = 0 \quad (4.4)$$

Se  $c^T B$  é não nulo, é possível determinar  $u_e$  a partir de (4.4). Ter-se-á, então :

$$u_e = -(c^T B)^{-1} c^T (Ax + Dp) \quad (4.5)$$

$$x \in H$$

$$x \in R^n$$

$$u_e \in R$$

Substituindo-se o valor de  $u_e$  dado por (4.5), em (4.1) , obtem-se as equações do regime de escorregamento:

$$\dot{x} = \left[ I - B(c^T B)^{-1} c^T \right] (Ax + Dp) \quad (4.6)$$

$$\langle c, x \rangle = 0$$

$I \rightarrow$  matriz identidade

Por (4.6) vê-se claramente que, de uma maneira geral, os parâmetros e as perturbações influenciam o comportamento do sistema em regime de escorregamento.

Entretanto, partindo de (4.6), é possível determinar condições sobre as matrizes  $A$  e  $D$  de maneira a fazer com que as variações de parâmetros e as perturbações não influenciem o regime de escorregamento.

Dividindo o problema em duas etapas, considerar-se-á primeiro o caso das perturbações.

TEOREMA (4.1) - Para que as perturbações não atuem no regime de escorregamento, isto é, para que :

$$\left[ I - B(c^T B)^{-1} c^T \right] Dp \equiv 0 \quad \forall p \in R^L \quad (4.7)$$

é necessário e suficiente que :

$$\text{posto } [B, D] = \text{posto } B \quad (4.8)$$

Demonstração :

É possível escrever (4.7) na forma :

$$Dp \equiv B(c^T B)^{-1} c^T Dp \quad \forall p \in R^L \quad (4.9)$$

Para (4.9) ser válida é necessário que para cada  $p \in R^L$  exista  $m \in R$ , tal que :

$$Dp \equiv Bm \quad (4.10)$$

Para provar a suficiência, basta substituir (4.10) em (4.9). Verificar-se-á, então, a identidade.

A expressão (4.9) deve ser satisfeita para qualquer valor de  $p$ . Isto será verdadeiro se (4.8) for válida, isto é, se todas as colunas de  $D$  forem múltiplas de  $B$ .

Para o caso das variações de parâmetros, a matriz  $A$  será dividida em duas partes,  $A_V$  e  $A_C$ , tais que :

$$A = A_V + A_C \quad (4.11)$$

onde  $A_V$  é uma matriz que contém todos os parâmetros variáveis de  $A$ , e  $A_C$  contém os demais elementos.

A equação de escorregamento (4.6) ficará então:

$$\dot{x} = \left[ I - B(c^T B)^{-1} c^T \right] (A_V x + A_C x + Dp) \quad (4.12)$$

TEOREMA (4.2): Para que as variações de parâmetros não tenham influência no regime de escorregamento, isto é, para que:

$$\left[ I - B(c^T B)^{-1} c^T \right] A_V x \equiv 0 \quad x \in H \quad (4.13)$$

é necessário e suficiente que :

$$\text{posto } [B, A_V T_i] = \text{posto } B \quad (4.14)$$

para todos os vetores  $T_i$  de uma base de  $H$

Demonstração :

É possível escrever (4.13) na forma :

$$A_V x \equiv B(c^T B)^{-1} c^T A_V x \quad \forall x \in H \quad (4.15)$$

Seja uma base de  $H$  :

$$T = \left[ \dots T_i \dots \right] \quad T_i \in R^n \quad i=1, \dots, n-1$$

Logo,  $x$ , no subespaço  $H$ , será expresso por:

$$x = T x^* \quad , \quad x^* \in R^{n-1}$$

Substituindo em (4.15), vem :

$$A_V T x^* \equiv B(c^T B)^{-1} c^T A_V T x^* \quad (4.16)$$

Mas (4.16) é análoga à expressão (4.9), do teorema (4.1), onde  $A_V T$  substitui  $D$ . Portanto, pelo teorema (4.1), deve-se ter:

$$\text{posto} \left[ B, A_V T \right] = \text{posto } B \quad (4.17)$$

isto é, todas as colunas de  $A_V T$  são combinações lineares das colunas de  $B$ , ou seja

$$\text{posto} \left[ B, A_V T_i \right] = \text{posto } B \quad , \quad T_i \quad , \quad i=1, \dots, n-1 \quad .$$

c.q.d.

Pelos teoremas (4.1) e (4.2) é fácil concluir que se o sistema é representado no espaço de fase, isto é, se o regime de escorregamento é obtido usando-se uma variável (normalmente o erro) e suas  $n-1$  derivadas, ter-se-á sempre invariância em relação às variações de parâmetros e às perturbações.

De fato, no espaço de fase, o sistema é representado por:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_{i+1} \quad i=1, \dots, n-1$$

$$\frac{dx_n}{dt} = \sum_{i=1}^n a_i x_i + u + p \quad a_i \in R$$

e as relações (4.8) e (4.14) são satisfeitas, pois todas as linhas das matrizes  $A_v$ ,  $B$  e  $D$  são nulas, exceto as últimas.

Também se pode usar os teoremas (4.1) e (4.2) na síntese de sistemas de controle a estrutura variável, com o intuito de se obter invariância no tempo.

As relações (4.8) e (4.14) fornecem um meio de se escolher os parâmetros do controlador (elementos da matriz coluna  $B$ ), e o subespaço de escorregamento (vetor  $c$ , matriz  $T$ ), de maneira a se conseguir invariância no tempo.

Note-se que, no caso da relação (4.14), como os elementos da matriz  $A_v$  são variáveis, poderá ser necessário escolher um subespaço variável, isto é, um vetor  $c$  variável em função de  $A_v$ , para que a relação seja válida para todo o tempo.

Por outro lado, se os elementos da matriz  $D$  forem variáveis, também poderá ser necessário que os elementos de  $B$  sejam variáveis em função de  $D$ , de maneira que a relação (4.8) seja válida todo o tempo.

Em caso práticos, quando for possível obter as  $n-1$  derivadas sucessivas da coordenada controlada, sem grandes inconvenientes (ruído), é preferível usar-se o sistema na forma de variáveis de fase. Assim ter-se-á garantia da invariância no tempo. Mas isso nem sempre é possível, pois os derivadores introduzem bastante ruído, de um modo geral, nos equipamentos. Mesmo assim, usando-se outras variáveis de estado, obtidas diretamente do processo,

com um mínimo de problemas de instrumentação, é vantajoso o emprego dos sistemas de controle a estrutura variável. Apesar de não se obter invariância no tempo, obtem-se, pelo escorregamento, invariância no espaço, e a resposta às perturbações estará sempre na superfície de escorregamento, a qual pode ser escolhida a priori. Também, em certos casos práticos, não é interessante obter-se invariância no tempo, como, por exemplo, no controle da posição de um certo corpo de estrutura rígida, sujeito a perturbações de alta frequência. Se o efeito dessas perturbações for anulado, poderá haver um efeito destrutivo para a estrutura (ressonância, por exemplo).

#### 4.2 - Estabilidade dos Sistemas de Controle a Estrutura Variável

No Capítulo 3 foi visto como se determinar os coeficientes  $\psi_i^x$  e  $\psi_i^y$  do controlador de maneira que o sistema entrasse em regime de escorregamento no hiperplano definido por (3.20), apenas para condições iniciais tomadas na vizinhança do hiperplano.

Para se garantir a estabilidade assintótica global, é preciso se assegurar de duas coisas:

- 1) Qualquer que seja a condição inicial, o ponto representativo deve atingir o hiperplano de escorregamento num tempo finito.
- 2) A equação do regime de escorregamento deve ser globalmente assintoticamente estável.

Como uma escolha conveniente dos coeficientes  $c_i$  do

hiperplano de escorregamento (pelo critério de Routh-Hurwitz, por exemplo), se pode obter um regime de escorregamento estável. No caso da superfície  $S$  de escorregamento ser não linear, se pode usar o segundo método de Liapunov.

Quanto ao item 1), Yemel'yanov [24] apresentou uma condição de suficiência, para um sistema não perturbado, para que o ponto representativo alcance o hiperplano de escorregamento, a partir de qualquer condição inicial tomada no espaço de fase. Essa condição está expressa no seguinte teorema:

TEOREMA (4.3) - Seja o sistema definido por (3.19), no qual

$$F(i) \equiv 0 \quad i=0,1,\dots,m$$

e

$$u = \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i^x x_i$$

$$\text{sendo } \psi_i^x = \begin{cases} w_i^x \\ \lambda_i^x \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \lambda_i^x = -w_i^x \\ w_i^x > 0 \end{cases}$$

Se as condições de existência do escorregamento são satisfeitas, e se todos os coeficientes  $c_i$  do hiperplano são positivos, então existe  $\Omega \in \mathbb{R}$  tal que, quando  $w_i^x > \Omega$ , o ponto representativo do sistema atinge o hiperplano num tempo finito, a partir de qualquer condição inicial no espaço de fase.

Portanto, para se garantir a estabilidade assintótica global, deve-se escolher  $w_i^x$  e  $\lambda_i^x$  de maneira a satisfazer as condições (3.27) e a condição do teorema (4.3).

Pode-se escolher, por exemplo,

$$w_i^x = -\lambda_i^x$$

sendo

$$w_i^x \geq \max\left\{ \left| \sup_{b_j \psi_i^y} (c_{i-1} - a_i - c_{n-1} c_i + a_n c_i) \right|, \left| \inf_{b_j \psi_i^y} (c_{i-1} - a_i - c_{n-1} c_i + a_n c_i) \right|, \Omega \right\}$$

Uma outra condição suficiente (supondo-se que  $f_N^-(x,t) > 0$  e  $f_N^+(x,t) < 0 \quad \forall x \in S$ ) para que o ponto atinja o hiperplano, é fazer com que a condição  $s\dot{s} < 0$  seja satisfeita para todo ponto do espaço. Assim, o hiperplano será atrativo não apenas para pontos de sua vizinhança, mas para qualquer ponto do espaço.

Essa condição pode ser satisfeita acrescentando-se um termo  $\psi_n^x x_n$  no sinal de controle  $u$  definido por (3.22).

De fato, sendo:

$$\frac{ds}{dt} = \sum_{i=1}^n \beta_i(t) x_i - u,$$

onde  $\beta_i(t)$  é função dos  $c_i$ ,  $d_i$  e  $r_{ij}(t)$  e  $F^{(i)} = 0$ ,  
 $i=0,1,\dots,m$  e  $u = \sum_{i=1}^n \psi_i^x x_i$ , ter-se-á :

$$\frac{ds}{dt} = \sum_{i=1}^n (\beta_i - \psi_i^x) x_i$$

Para que  $s\dot{s} < 0$ , é suficiente que :

$$\psi_i^x = \begin{cases} w_i^x & \text{para } x_i s > 0 \\ \lambda_i^x & \text{para } x_i s < 0 \end{cases}$$

onde:



$$w_i^x > \sup_{r_{ij}(t)} \beta_i$$

$$\lambda_i^x < \inf_{r_{ij}(t)} \beta_i$$

O inconveniente dessa solução é a necessidade de se usar a derivada de ordem  $n$  na lei de controle. Isso aumenta o nível de ruído, e pode prejudicar o bom funcionamento do sistema.

#### 4.3 - Estudo da Estabilidade dos Sistemas Descritos por Equações Diferenciais com Segundo Membro Descontínuo

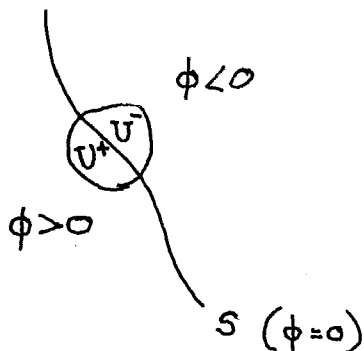
Filippov [1] demonstrou um teorema a partir do qual se pode estudar a estabilidade das soluções (no sentido de Filippov) de um equação diferencial com segundo membro descontínuo.

TEOREMA 4.4 - Seja  $S$  um trecho de uma superfície no espaço dos  $(t, x_1, \dots, x_n)$ , definida pela equação  $\phi(t, x_1, \dots, x_n) = 0$ . Suponha-se que na vizinhança de  $S$ , a função  $\phi$  é continuamente diferenciável e troca de sinal ao cruzar  $S$ . Note-se por  $U^+(U^-)$  a parte da vizinhança de  $S$  onde  $\phi > 0$  ( $\phi < 0$ ). Se o lado direito da equação (2.1) satisfaz a condição A (Apêndice), e quase em toda parte em  $U^+(U^-)$  a desigualdade

$$\frac{d\phi}{dt} \equiv \frac{\partial \phi}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi}{\partial x_i} f_i \leq 0, \quad (4.18)$$

é satisfeita, então nenhuma solução de (2.1) pode passar de  $U^- \cup S$  para  $U^+$  (e respectivamente, de  $U^+$  para  $U^- \cup S$ ), à medida que  $t$

cresce. Se se tiver dependência contínua (unilateral) da solução nas condições iniciais, então nenhuma solução pode cruzar de  $U^- \cup S$  para  $U^+$ , no caso da condição (4.18) ser satisfeita apenas em  $U^-$ .



O teorema 4.4 permite, em certos casos, construir uma região fora da qual não passa nenhuma solução (no sentido de Filippov) do sistema (2.1), possibilitando assim o estudo da estabilidade das soluções. Note-se que a curva definida por  $\phi(t,x)=0$  pode ser uma curva fechada.

#### 4.4 - Os Sistemas de Controle a Estrutura Variável e o Segundo Método de Liapunov

No parágrafo 2.5 foi visto como o emprego do segundo método de Liapunov, no projeto de sistemas de controle, pode levar a sinais de controle descontínuos.

A idéia básica é achar uma função de Liapunov  $V$ , definida positiva, e escolher o sinal de controle  $u$  de maneira que  $\dot{V}$  definida negativa, seja a mais negativa possível. Note-se que, quando a função de Liapunov é quadrática, as superfícies de comutação obtidas são hiperplanos passando pela origem. De uma maneira geral, as superfícies de comutação podem ser não lineares.

Entretanto, é possível trabalhar com funções de Lia-

punov semidefinidas, conforme a extensão de LaSalle ([25], [26]). Nesse caso, o procedimento é o mesmo que é utilizado no projeto de sistemas de controle a estrutura variável, e a estabilidade obtida é a de um conjunto invariante, que é a superfície de escorregamento.

Para se compreender melhor a semelhança, é necessário introduzir alguns conceitos básicos.

Seja o sistema

$$\dot{x} = f(x) \quad (4.19)$$

DEFINIÇÃO 4.1 - Um ponto  $p$  é chamado um ponto limite positivo de  $x(t)$  se existir uma sequência  $(t_n) \rightarrow \infty$  tal que  $x(t_n) \rightarrow p$ , ou seja, tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x(t_n), p) = 0$ .

DEFINIÇÃO 4.2 - O conjunto de todos os pontos limites positivos de uma dada solução  $x(t)$  é chamado conjunto limite positivo de  $x(t)$ , e denotado por  $\Gamma^+$ .

PROPOSIÇÃO 4.1 - Se  $p$  é um ponto limite positivo de  $x(t)$ , então todos os outros pontos de  $x(t)$ , a partir da condição inicial  $p$ , são também pontos limites positivos de  $x(t)$ . Isso é o mesmo que dizer que o conjunto limite positivo é inteiramente constituído de trajetórias (demonstrado em [27]).

Nota : a) Na demonstração da proposição (4.1) foi admitida a dependência contínua da solução nas condições iniciais. Para o caso de soluções de Filippov, se deve admitir, conforme o corolário (1) do teorema (11) de [1], a unicidade da solução. Se não há unicidade, então a proposição (4.1) será substituída por:

Se  $p$  é um ponto limite positivo de  $x(t)$ , então, entre as trajetórias que passam por  $p$ , existe uma tal que todos os seus pontos são também pontos limites positivos de  $x(t)$  [1].

b) O conjunto limite positivo pode ser um ciclo limite. Nesse caso, existe uma subsequência  $x(t_k) \rightarrow p$ ,  $p \in \mathbb{R}^+$ , fixo, quando  $k \rightarrow \infty$ . Essa subsequência pode ser obtida considerando-se uma sequência  $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tal que :

$$t_1 = t, \quad t_2 = t + \tau, \quad t_3 = t + 2\tau, \quad \dots, \quad t_{k+1} = t + k\tau$$

Se  $\tau$  é convenientemente escolhido, conseguir-se-á uma sequência  $x(t_k) \rightarrow p$  quando  $k \rightarrow \infty$ .

DEFINIÇÃO 4.3 - Diz-se que  $x(t)$  tende para um conjunto  $S$  quando  $t \rightarrow \infty$  se, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $T > 0$  tal que  $\inf_{p \in S} ||x(t) - p|| < \varepsilon$ , para todo  $t > T$ . Se toda solução  $x(t) \rightarrow S$  quando  $t \rightarrow \infty$ , então  $S$  é dito assintoticamente estável.

PROPOSIÇÃO 4.2 - Se  $x(t)$  é limitada para todo  $t \geq 0$ , então seu conjunto limite positivo  $\mathbb{R}^+$  é não vazio, compacto e invariante.

Demonstração : Por definição de solução limitada ([3]),

$$\exists B(x_0, t_0) \in \mathbb{R}, \quad B(x_0, t_0) \geq 0, \quad \text{tal que} \quad ||x(t)|| \leq B(x_0, t_0), \\ \forall t \geq t_0 \implies x(t) \in K_0, \quad \text{sendo } K_0 \text{ definido por:}$$

$$K_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| \leq B(x_0, t_0)\}$$

Como  $K_0$  é compacto,  $\exists (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \infty$  tal que

$(x(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$  admite uma subsequência convergente para  $p \in K_0$ .

Isto é,  $(t_k)_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow \infty$ , tal que  $(x(t_k))_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow p \in K_0 \implies p \in \Gamma^+ \implies \Gamma^+ \neq \emptyset$ .

Como  $\Gamma^+ \subset K_0$ ,  $\Gamma^+$  é limitado.

A prova de que  $\Gamma^+$  é fechado e invariante está em [27].

**TEOREMA 4.5** - Suponha-se que toda solução  $x(t)$  de (4.19) seja limitada. Seja a função  $V : \mathbb{R}^n_x \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ , tal que em todo o domínio  $G \subset \mathbb{R}^n$  de definição da  $f$ , tenha-se  $\dot{V}(x) \leq 0$ . Seja  $E = \{x \in G \mid \dot{V}(x) = 0\}$ , e  $S$  o maior conjunto invariante contido em  $E$ . Então, toda solução  $x(t)$  começando em  $G$ , tende para  $S$ , quando  $t \rightarrow \infty$ .

**Demonstração** : Se  $x(t)$  é limitada, existe um compacto  $K_x$  tal que  $x(t) \in K_x$   $\forall t \geq t_0$ , isto é, para cada solução  $x(t)$  existe um compacto  $K_x$ , pois cada solução é limitada, por hipótese. Note-se que  $K_x \subset G$ , pois todas as soluções estão em  $G$ .

Como  $\dot{V}(x) \leq 0$  em  $K_x$ ,  $V(x(t))$  é uma função não decrescente de  $t$ .  $V(x)$  sendo contínua em  $K_x$ ,  $\exists p \in K_x$  tal que  $V(p)$  é mínimo de  $V(x)$ , isto é,  $V(p) \leq V(x) \forall x \in K_x$ . Seja  $\ell$  o valor desse mínimo. Portanto,  $\forall x \in K_x$ ,  $V(x) \geq \ell$ . Logo,  $V(x(t))$  tende, em  $K_x$  para um valor limite  $c$ , quando  $t \rightarrow \infty$ , de forma que :

$$V(x) \geq c \geq \ell.$$

Por outro lado,  $x(t) \rightarrow \Gamma^+$  quando  $t \rightarrow \infty$  (proposição 4.2), sendo que  $\Gamma^+ \subset K_x$ .

Logo,  $V(x) = c$ ,  $\forall x \in \Gamma^+$ , pois  $V$  é contínua, e portanto,  $\dot{V}(x) = 0$ ,  $\forall x \in \Gamma^+ \Rightarrow \Gamma^+ \subset E$ .

Seja  $S$  o maior conjunto invariante contido em  $E$ . Como  $\Gamma^+$  é invariante (proposição 4.2),  $\Gamma^+ \subset S$ .

Portanto, como  $x(t) \rightarrow \Gamma^+$ , quando  $t \rightarrow \infty$ , e  $\Gamma^+ \subset S$ ,  $x(t) \rightarrow S$ , quando  $t \rightarrow \infty$ .

A partir desses resultados, se pode enunciar o seguinte teorema:

TEOREMA 4.6 : Considere-se o sistema 4.19, onde  $f$  satisfaz à condição  $B$ , e apresenta uma descontinuidade de primeira espécie em pontos da superfície  $S$  definida por  $S = \{x \in G \mid s(x)=0\}$ , sendo  $s : \begin{matrix} R^n \\ x \mapsto s(x) \end{matrix} \rightarrow R$  como no teorema (2.1). Suponha-se que toda solução  $x(t)$  é limitada. Seja a função :  $V : R^n \rightarrow R$   

$$x \mapsto V(x) = \frac{1}{2} s^2(x)$$

Se  $\dot{V}(x) < 0$ ,  $\forall x \in G^- \cup G^+$ , e  $\dot{V}(x) = 0 \quad \forall x \in S$ , então  $x(t) \rightarrow S$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

Demonstração : Tem-se :

$$\dot{V}(x) = s\dot{s} \Rightarrow s\dot{s} < 0 \quad \forall x \in G^- \cup G^+$$

Logo, pelo teorema (2.2), a solução no sentido de Filippov é única unilateralmente, e a superfície  $S$  é uma superfície de escorregamento.

Por outro lado,  $S = \{x \in G \mid \dot{V}(x) = 0\}$ , e o maior conjunto invariante contido em  $S$  é o próprio  $S$ .

Sendo  $x(t)$  limitada, e  $\dot{V}(x) \leq 0$ ,  $\forall x \in G$ , então,

pelo teorema (4.5), toda solução  $x(t)$  tende para  $S$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

### Observações:

1) Pela proposição 2.1, se  $s(x) \cdot \dot{s}(x) \leq -|s(x)|^\varepsilon \quad \forall x \in G-S$ , então a solução alcançará  $S$  em tempo finito.

2) Suponha-se que a origem seja um ponto de equilíbrio. Para que a origem seja um estado de equilíbrio globalmente assintoticamente estável, é necessário que o regime de escorregamento seja globalmente assintoticamente estável. Para isso se deve escolher uma superfície  $S$  conveniente, tal que  $\{0\} \subset S$ .

3) O teorema (4.4) pode ser usado para se determinar uma região limitada, tal que, toda solução começando nessa região, nela permanece para todo  $t \geq t_0$ . Para isso basta encontrar uma função  $\phi$  tal que o conjunto dos pontos tais que  $\phi(x) < 0$  seja limitado, e que, nesse conjunto, tenha-se  $\dot{\phi}(x) \leq 0$ . Se existir uma tal função, então é válido o resultado do teorema (4.5), para soluções começando em  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \phi(x) < 0\}$ .

A função  $\phi$  pode ser, por exemplo, da forma:

$$\phi(x) = V(x) - b, \quad b \in \mathbb{R}, \quad b \geq 0,$$

onde  $V$  é definida positiva, e  $\dot{V}(x) \leq 0, \quad \forall x \in \Omega$ .

Como as propriedades da função  $\phi$  se mantêm para qualquer valor de  $b \geq 0$ , então o maior conjunto invariante contido em  $E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \dot{\phi}(x) = 0\}$  é globalmente assintoticamente estável.

Como exemplo de aplicação do teorema (4.6), reconsidere-se o problema exposto no parágrafo (3.2).

O sistema é definido por :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -w_n^2 x_1 - 2\xi w_n x_2 - Ku \end{cases}$$

O problema é determinar o sinal de controle  $u(x)$ , de maneira a levar o estado à origem.

A superfície de escorregamento escolhida é tal que:

$$s(x) = x_2 + Ax_1, \quad A > 0$$

A função de Liapunov será portanto:

$$V(x) = \frac{1}{2} (x_2 + Ax_1)^2$$

Pelo teorema (4.6), o sinal  $u(x)$  deve ser escolhido de maneira que  $\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \in G^- \cup G^+$ , e  $\dot{V}(x) = 0 \quad \forall x \in S$ .

Tem-se :

$$\dot{V}(x) = s(\dot{x}_2 + A\dot{x}_1) = s(-w_n^2 x_1 - 2\xi w_n x_2 - Ku + Ax_2)$$

Fazendo  $u = \psi_1 x_1 + \psi_2 x_2$  vem:

$$\dot{V}(x) = s \quad -(w_n^2 + K\psi_1)x_1 - (2\xi w_n - A + K\psi_2)x_2$$

A lei será, portanto:

$$\begin{cases} \psi_1 > -\frac{w_n^2}{K} & \text{se } x_1 s > 0 \\ \psi_1 < -\frac{w_n^2}{K} & \text{se } x_1 s < 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \psi_2 > \frac{A-2\xi w_n}{K} & \text{se } x_2^s > 0 \\ \psi_2 < \frac{A-2\xi w_n}{K} & \text{se } x_2^s < 0 \end{cases}$$

Para verificar se todas as soluções são limitadas , considere-se a função:

$$\phi(x) = V_1(x) - b$$

onde

$$V_1(x) = V(x) + cx_1^2, \quad c > 0 \quad \text{e} \quad b > 0$$

Note-se que  $V_1(x)$  é definida positiva.

Tem-se :

$$\dot{\phi}(x) = s\dot{s} + 2cx_1x_2$$

Para pontos sobre  $S$  ,  $\dot{\phi}(x) = -2cAx_1^2 \leq 0$

Para pontos fora de  $S$  , existem dois casos :

$$\text{I) } x_1x_2 < 0$$

$$\text{II) } x_1x_2 > 0$$

No caso (I), tem-se :  $\dot{\phi}(x) < 0$  .

No caso (II), tem-se :

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(x) = & -A(w_n^2 + K\psi_1)x_1^2 - (w_n^2 + K\psi_1) + A(2\xi w_n - A + K\psi_2) - 2c x_1x_2 - \\ & - (2\xi w_n - A + K\psi_2)x_2^2 \end{aligned}$$

Nesse caso, a condição  $x_i^s > 0$  ,  $i=1,2$  , é satisfeita, e portanto :

$$w_n^2 + K\psi_1 > 0$$

e

$$2\xi w_n - A + K\Psi_2 > 0$$

Logo, para que  $\dot{\phi}(x)$  seja definida negativa, se deve escolher  $c$  de maneira que :

$$c \leq \frac{w_n^2 + K\Psi_1 + A(2\xi w_n - A + K\Psi_2)}{2}$$

Portanto, todas as soluções são limitadas, e é válido o resultado do teorema (4.6).

Note-se que o estado alcançará  $S$  em tempo finito , pois todas as soluções são limitadas, e, ademais, a descontinuidade de  $f$  em  $S$  é de primeira espécie.

A estratégia obtida aqui é mais complicada do que a que foi obtida no parágrafo (3.2). Naquele caso foi usada apenas a condição de escorregamento, e o teorema (4.3), através de uma análise no plano de fase. Entretanto, para sistemas não lineares, o teorema (4.6) oferece uma possibilidade de estudo. O problema recai em achar funções definidas e semidefinidas, ou melhor, recai no segundo método de Liapunov.

No estudo de estabilidade apresentado, considerou-se sempre o problema da estabilidade, no sentido de Liapunov, da solução trivial da equação (2.1). O teorema 4.4 não trata especificamente deste caso, mas pode ser usado para um estudo da estabilidade das soluções.

Para o estudo do problema da estabilidade do movimento

to, o que se faz é, através, de uma mudança de variáveis, reduzir o problema ao estudo de um movimento em relação à origem do novo sistema de coordenadas [30]. As perturbações serão então estudadas através de um sistema do tipo (2.1), com  $f(0,t)=0$ ,  $\forall t \geq t_0$ . A influência das perturbações no movimento é analisada então como um problema de estabilidade, no sentido de Liapunov, da solução trivial de uma equação do tipo (2.1).

## CAPÍTULO 5

### CONCLUSÕES, COMENTÁRIOS E SUGESTÕES

Foram apresentados os sistemas de controle a estrutura variável, e estudadas as suas características principais. Esse estudo foi feito baseado nos resultados de Filippov [1] sobre equações diferenciais com segundo membro descontínuo.

Uma característica dos sistemas de controle a estrutura variável, é que os sinais de controle são determinados a partir de relações de desigualdade, e daí a sua semelhança com o segundo método de Liapunov. Melhor dizendo, é possível interpretar os sistemas de controle a estrutura variável como um resultado da aplicação do segundo método de Liapunov, no projeto de sistemas de controle.

Para que sejam obtidas certas propriedades (invariância, movimento sobre uma dada trajetória, etc), força-se o sistema a entrar em regime de escorregamento numa superfície, escolhida a priori, no espaço de estado.

As vantagens principais desses sistemas são:

- 1) Baixa sensibilidade em relação às variações de parâmetros e às perturbações;
- 2) Não há necessidade de uma perfeita identificação do sistema a ser controlado, pois os parâmetros do controlador são determinados a partir de relações de desigualdade;
- 3) Flexibilidade na determinação do tipo de regime transitório-

rio, através de uma escolha adequada da superfície de escorregamento;

4) Facilidade de implementação prática, comparativamente a ou tros sistemas de controle de mesmo desempenho.

Os controladores a estrutura variável podem ser aplicados em uma grande variedade de processos, e, sempre que possível, é interessante forçar o sistema a entrar em regime de escorregamento. Entretanto, por restrições de natureza física, existem sistemas que não suportam o regime de escorregamento. Para que seja admissível o escorregamento, é necessário que os órgãos de comutação resistam a um regime de oscilação forçada de alta frequência, e que o sistema controlado seja um filtro passa-baixa. Dessa forma, a os cilação do escorregamento não ideal (frequência finita, e amplitude não nula) não provocará nenhuma imperfeição no desempenho do sistema. Os sistemas eletromecânicos (máquinas elétricas) e térmicos, com órgãos de comutação eletrônicos, são exemplos de casos onde o es corregamento é admissível. De qualquer maneira, mesmo que o escor regamento não seja possível, é vantajoso o emprego dos sistemas de controle a estrutura variável. Obtem-se, de uma maneira geral, um sistema mais rápido e mais amortecido. Um exemplo disso é o uso de capacitores comutáveis na estabilização de sistemas elétricos de potência [28].

Um tema de pesquisa seria a aplicação dos resultados sobre as equações diferenciais com segundo membro descontínuo ao estudo da estabilidade dos sistemas elétricos de potência, e possivelmente algumas extensões dos resultados sobre estabilidade das

soluções de Filippov. Em sistemas de potência, quando ocorre um defeito, os dispositivos de proteção atuam, desligando máquinas ou linhas de transmissão, provocando variações descontínuas nos parâmetros das equações que regem o comportamento dinâmico dos sistemas. Modelando-se o sistema de maneira que a lei de comutação dos parâmetros seja uma função do estado, chega-se a uma equação diferencial com segundo membro descontínuo. O estudo da estabilidade do sistema assim modelado, serve inclusive para a elaboração de estratégias de controle, do tipo a estrutura variável, como é o caso da comutação de capacitores em série com as linhas de transmissão [28] .

Como aplicações importantes já feitas dos sistemas de controle a estrutura variável nos quais ocorre o escorregamento , se pode citar o controle automático da espessura, num laminador a quente [29], e o controle automático das comportas de alimentação de grupos alternadores, numa usina hidroelétrica [13]. Também em [13] é analisado como usar as propriedades do regime de escorregamento na elaboração de dispositivos derivadores, e filtros, usados nos controladores a estrutura variável.

O fato de ser possível conseguir, sob certas condições, um movimento sobre uma superfície escolhida a priori, sugere a aplicação dos sistemas de controle a estrutura variável ao controle ótimo, ou sub-ótimo (parágrafo 2.7) .

Um outro tema de pesquisa seria o estudo dos sistemas de controle a estrutura variável multidimensionais, isto é, sistemas com várias entradas e várias saídas. O problema principal a-

qui, são as condições de unicidade das soluções, e a definição do movimento em superfícies de descontinuidade que se interceptam. Uma solução talvez seja a utilização do conceito de escorregamento de ordem superior, apresentado em [10]. Essa noção aparece quando se força o sistema a escorregar em superfícies de dimensões cada vez menores, com o intuito de melhorar o regime transitório.

APÊNDICE IEQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM SEGUNDO MEMBRO DESCONTÍNUO

Considere-se o sistema:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) \quad (I-1)$$

onde,

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

sendo :

$$\begin{aligned} f_i : G \times (t_1, t_2) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x, t &\mapsto f_i(x, t) \end{aligned}$$

CONDIÇÃO A

A função  $f$  satisfaz à condição A se e só se,  $\forall i$ ,  $f_i$  é uma função mensurável, definida quase em toda parte num domínio  $Q$  (aberto ou fechado) do espaço dos  $(x, t)$ , e para um compacto arbitrário  $D \subseteq Q$ , existe uma função  $A(t)$ , finita quase em toda parte, tal que quase em toda parte em  $D$

$$||f_i(x, t)|| < A(t)$$

CONDIÇÃO B

Diz-se que  $f$  satisfaz à condição B em uma região



$Q$  (aberta ou fechada) do espaço dos  $(x,t)$  se e só se  $\forall i, f_i$  é definida quase em toda parte em  $Q$ , é mensurável, e para qualquer compacto  $D \subseteq Q$ , existe uma função integrável  $B(t)$  tal que, quase em toda parte em  $D$  tenha-se :

$$||f_i(x,t)|| < B(t)$$

TEOREMA I-1 - Seja a equação I-1, onde  $f$  satisfaz à condição B. Então, para uma condição inicial arbitrária  $x(t_0) = a$ ,  $(a, t_0) \in G \times (t_1, t_2)$ , existe uma solução de I-1 satisfazendo a essa condição inicial, e definida no intervalo  $[t_0-d, t_0+d]$ , onde  $d$  é tal que, o cilindro de dimensão  $(n+1)$

$$|t-t_0| \leq d, \quad ||x-a|| \leq \left| \int_{t_0}^{t_0+d} B(t) dt \right|$$

está inteiramente situado em  $G$ .

TEOREMA I-2 - Seja a equação I-1, onde  $f$  satisfaz à condição B. Então, qualquer solução  $x(t)$  dessa equação é prolongável no intervalo  $(t_1, t_2)$ , onde ou  $t_2 = +\infty$ , ou para  $t \rightarrow t_2 - 0$  tem-se uma das três alternativas:

- a)  $||x(t)|| \rightarrow \infty$
- b)  $\rho \rightarrow 0$  ( $\rho$  é a distância do ponto  $(x(t), t)$  à fronteira de  $Q$ )
- c)  $\lim ||x(t)|| < \infty$ ,  $\lim \rho > 0$ ,  $\lim (||x(t)|| + \frac{1}{\rho}) = \infty$

Observação: Se o domínio  $Q$  é fechado, então o caso c) é impossível, mas no caso b),  $\lim_{t \rightarrow t_2 - 0} x(t) = b$  existe, e o ponto  $(b, t_2)$  es

tá na fronteira de  $Q$  .

## APÊNDICE II

### ESTABILIDADE EM RELAÇÃO À MEDIDA

Seja o sistema:

$$\dot{x} = f(x) \quad (\text{II-1})$$

Se  $f$  for contínua, o estudo da influência das perturbações  $\xi(t)$  no sistema é feito da mesma maneira, quer elas entrem na equação de forma que

$$\dot{x}(t) = f(x(t) + \xi(t)) ,$$

ou que

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + \xi(t)$$

Isso não é verdadeiro se  $f$  é descontínua.

Vários problemas de controle em malha fechada levam a equações diferenciais com segundo membro descontínuo, da forma:

$$f(x) = F(x, u(x))$$

onde  $u$  é um sinal de controle.

Na prática, o valor de  $u$  é determinado a partir de uma medida do estado  $x$ , no tempo  $t$ . Se há um erro  $\xi(t)$  nessa medida, a equação do movimento será:

$$\dot{x}(t) = f(x(t) + \xi(t)) \quad (\text{II-2})$$

Sendo  $f$  descontínua, ela é muito sensível às perturbações, nos pontos de descontinuidade. Daí o conceito de estabilidade em relação à medida. É importante saber a influência de

$\xi(t)$  na solução de (II-2) .

Intuitivamente,  $f$  é estável em relação à medida se quaisquer soluções das equações (II-1) e (II-2), satisfazendo às mesmas condições iniciais, permanecem arbitrariamente próximas, em qualquer intervalo finito positivo de tempo, sempre que  $\sup ||\xi(t)||$  neste intervalo seja suficientemente pequeno.

DEFINIÇÃO II-1 : Um campo vetorial  $f$  , para o qual uma solução clássica\* de  $\dot{x} = f(x)$  , com condição inicial  $x^0$ , existe, é dito ser estável em relação à medida se, dado  $\epsilon > 0$  e  $T > 0$  finito ,  $\exists \delta > 0$  tal que, sempre que  $\xi$  seja uma função mensurável em  $[0, T]$ , com valores em  $R^n$  , e norma menor do que  $\delta$  , para a qual uma solução correspondente  $\psi$  (no sentido clássico\*) de  $\dot{x}(t) = f(x, t) + \xi(t)$ , com  $x(0) = x^0$  , existe, em  $[0, T]$  , então  $||\phi - \psi|| < \epsilon$  , sendo

$$||\phi - \psi|| = \text{ess sup } \{ ||\phi - \psi|| , t \in [0, T] \}$$

onde  $\text{ess sup}_{x \in A} ||g(x)|| = \inf_{\substack{Z \subset A \\ \mu(Z)=0}} \{ \sup_{x \in A-Z} ||g(x)|| \}$  (essencial supremo de  $g$  em  $A$ )

TEOREMA II-1 - Se  $f$  é estável em relação à medida, então toda solução clássica é uma solução de Filippov.

Se  $f$  é estável em relação à medida, as soluções , para  $t \geq 0$  , do problema do valor inicial da equação diferencial correspondente, são únicas, e variam continuamente com a condição inicial (para  $t > 0$ , fixo)

---

\* Uma função  $x$  , da variável real  $t$  , é dita solução clássica de II-1 , se é absolutamente contínua, satisfaz à condição inicial, e, quase em toda parte :  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  .

# BIBLIOGRAFIA

1. A.F. Filippov - Differential Equations with Descontinuous Right-Hand Side , Mathematical Sbornik, Vol. 51 , n°1, 1960, English Translation; American Mathematical Society Translations, Ser. 2, Vol. 42.
2. H. Hermes - Discontinuous Vector Fields and Feedback Control - Differential Equations and Dynamical Systems - Halle/LaSalle, 1967 , Academic Press.
3. R.E. Kalman, J.E. Bertran - Control Systems Analysis and Design Via the "Second Method" of Liapunov I - Continuous Time Systems ASME J. of Basic Engineering, Paper n°59, NAC, November/1959.
4. M.A. Aizerman, F.R. Gantmacher - Some Aspects of the Theory of a Non-linear Automatic Control System with Discontinuous Characteristics - Proceedings of the First International Congress of the International Federation for Automatic Control - IFAC-Moscow, 1960.
5. J. André, P. Seibert - After End-point Motions of General Discontinuous Control Systems and their Stability Properties - Proceedings of the First International Congress of the International Federation for Automatic Control - IFAC - Moscow, 1960.
6. A.F. Filippov - Application of the Theory of Differential Equations with Descontinuous Right-Hand Sides to Non-linear Problems in Automatic Control - Proceedings of the First International Congress of the International Federation for Automatic Control-IFAC, Moscow, 1960.

7. S.V. Yemel'yanov - The Use of Non-linear Correcting Devices of the "Key" type for improving the quality of Second Order Automatic Control Systems - *Avtomatika i Telemekhanika*, Vol. 20, n° 7, 1959.
8. S.V. Yemel'yanov, M.A. Bermant, N.E. Kostyleva, V.A. Taran, V.I. Utkin - Design Principles in Variable Structure Systems for Control of Non-stationary Plants - Proceedings of the Third International Congress of the International Federation for Automatic Control - IFAC - London, 1966 - Butterworths.
9. E.A. Barbashin, E.I. Gerashchenko, V.A. Tabueva, R.M. Eidinov - The Methods of Analysing the Stability of Automatic Control Systems with a Variable Structure - Proceedings of the Third International Congress of the International Federation for Automatic Control - IFAC - London, 1966, Butterworths.
10. E.A. Barbashin - Introduction to the Theory of Stability - Wolters - Noordhoff Publishing - 1970.
11. V.I. Utkin - Quasi-Invariant Control of Forced Motion of Linear Systems with Variable Structure, *Tekhnicheskaya Kibernetika*, English Translation - Engineering Cybernetics, N°5, Sept/Oct. 1966.
12. Jean-Paul Vernhes - Contribution à l'étude des Systèmes de Commande à Structure Variable - Thèse de Docteur de 3<sup>eme</sup> Cycle - LAAS - Toulouse, 1971.
13. Jacques Erschler - Contribution à l'étude et à la mise en oeuvre de Systèmes de Commande à Structure Variable - Thèse de Docteur-Ingenieur, LAAS - Toulouse, 1971.

14. E.W. Hobson - The Theory of Functions of a Real Variable - Dover Publications, Inc. - 1907 (1927).
15. V.I. Buyakas - Optimal Control by Systems with Variable Structure - Avtomatika i Telemekhanika - Vol.27, N°4, 1966.
16. Yu. I Alimov - On the Application of Liapunov's Direct Method to Differential Equations with Ambiguous Right Sides - Avtomatika i Telemekhanika - vol.22 , n°7, 1961.
17. Flugge-Lotz - Discontinuous and Optimal Control - McGraw-Hill, 1968.
18. C.Mira, J.L. Abatut - Classification des Systèmes de Commande Automatique - Automatisme - Tome XII, N° 4, 1967.
19. P.I. Tchinaev - Systèmes Auto-Adaptatifs, Calcul et Projet , Dunod, Editeur, Paris, 1966.
20. R.C. Dorf - Modern Control Systems, Addison Wesley, 1967.
21. N.G. Yarovoi - Stability of Variable Structure Automatic Control Systems - Differentsial'nye Uravneniya , Vol.4, N°11, pp.1980-1990; 1968(English Translation, pp. 1022-1027).
22. E.A.Barbashin and N.G. Yarovoi - A Method for Stabilizing Control Systems - Differentsial'nye Uravneniya, Vol.3, N°5, pp.733-741, 1967 (English Translation- pp.374-378).
23. B.Drazenovic - The Invariance Conditions in Variable Structure Systems - Automatica, Vol.5, pp. 287-295 - Perganon Press, 1969.
24. S.V. Yemel'yanov - High-quality Control of Some Non-linear Plants with Variable Parameters - Izvestiya An SSSR. Energetike i Avtomatika, N° 4, 1962.

25. J.P. LaSalle - Some Extensions of Liapunov's Second Method ,  
IRE Transactions on Circuit Theory - December 1960.
26. J.P. LaSalle - An Invariance Principle in the Theory of Stability,  
Differential Equations and Dynamical Systems - Academic Press,  
1967, Hale/LaSalle .
27. Nemytskii and Stepanov - Qualitative Theory of Differential  
Equations - Princeton University Press, 1960.
28. M.Mansour - Stability Analysis and Control of Power Systems-  
Real-Time Control of Electric Power Systems - E. Handschin  
(Editor), Baden, Switzerland - Elsevier Publishing Co., 1972.
29. S.V. Yemel'yenov, G.M. Ulanov, V.S. Viktorova, and V.P. Agafonov-  
Synthesis of a Variable-Structure System for Automatic Control  
of Thickness of Hot-Rolled Metal - Avtomatika i Telemekhanika,  
Nº2, pp.115-127 , February/1969.
30. L.G. de Souza Fonseca - Domínios de Estabilidade Assintótica; Sua  
Determinação utilizando o Segundo Método de Liapunov - Tese  
de Mestrado, COPPE/UFRJ, 1971.